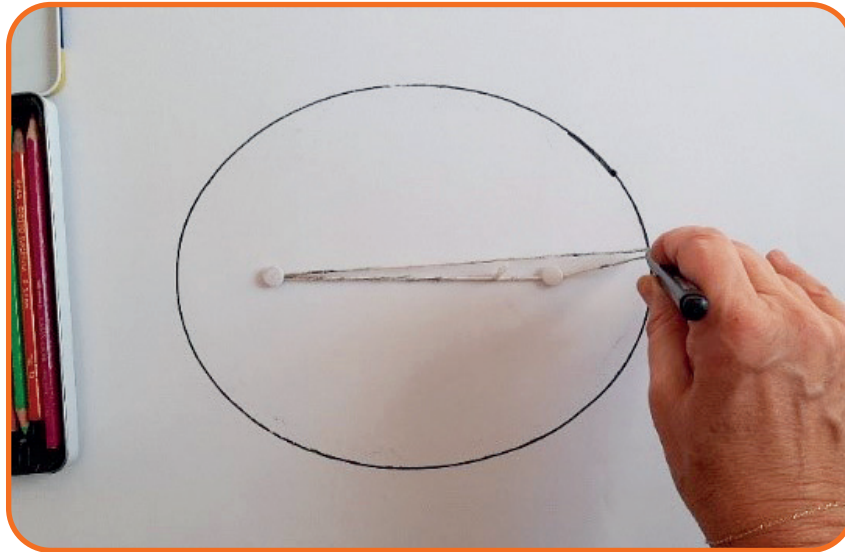


Relazioni tra perimetro e area di triangoli e quadrilateri

di Lorella Campolucci e Silvia Sbaragli

Per citazione: Campolucci L. & Sbaragli S. (2024). Relazioni tra perimetro e area di triangoli e quadrilateri. Gaia Edizioni Scuola

<https://missioneinsegnante.it/2024/01/08/relazioni-tra-perimetro-e-area-di-triangoli-e-quadrilateri/>



Triangoli nell'ellisse

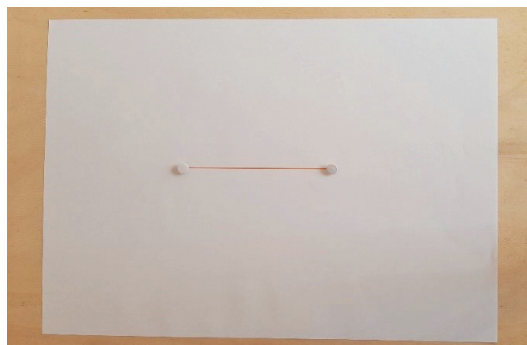
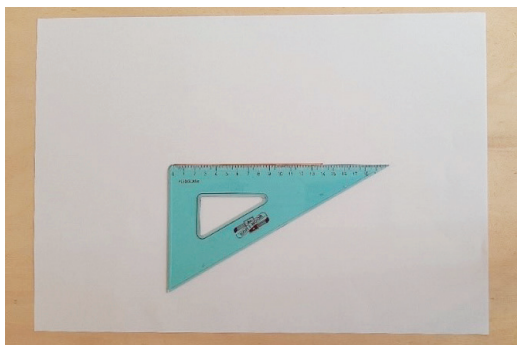
Questa attività laboratoriale consiste nel **disegnare un'ellisse e osservare le proprietà degli infiniti triangoli che si generano, in particolare le relazioni tra le loro aree e i loro perimetri.**

Per realizzarla è necessario procurarsi il seguente materiale:

- una tavoletta di legno morbido o di compensato (dello spessore di 0,6-1 cm) di dimensioni uguali o maggiori di un foglio A3;
- fogli A3, puntine da disegno, spago e pennarelli e/o pastelli.

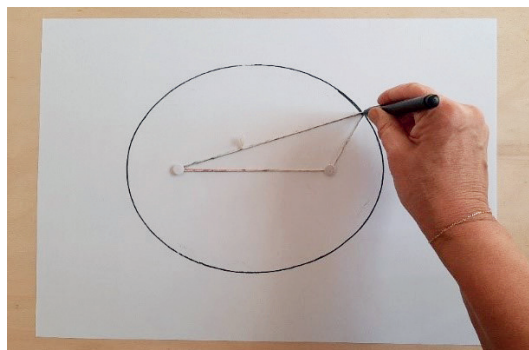
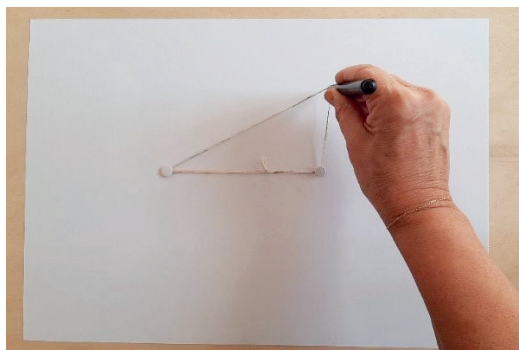
L'attività può essere gestita a piccoli gruppi.

Su un foglio A3 si traccia un segmento lungo 10-14 cm e si appoggia sulla tavoletta. Alle estremità del segmento si posizionano due puntine da disegno, in modo da lasciare qualche millimetro di spazio tra la testa della puntina e la tavoletta.



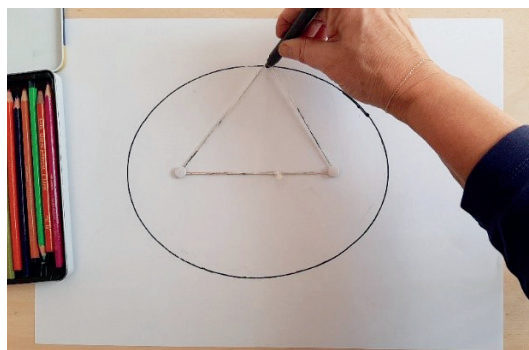
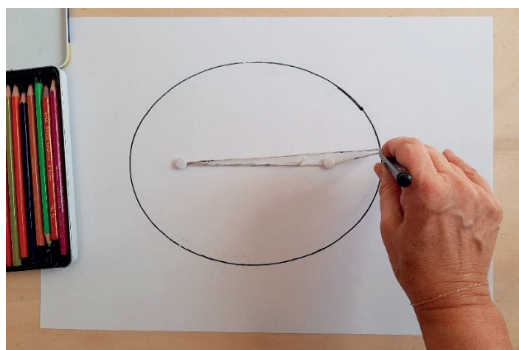
Prime fasi per la rappresentazione di un'ellisse.

Con lo spago andiamo a creare un cappio lungo circa 36-38 cm che fisseremo alle due puntine. Prendiamo poi un pennarello: posizioniamolo all'interno del cappio e, tenendo il cappio ben teso, ruotiamolo attorno alle due puntine tracciando una linea. **La figura che si genera con questo procedimento è detta ellisse.**



Rappresentazione di un'ellisse.

Mentre si traccia l'ellisse, si possono visualizzare gli infiniti triangoli i cui vertici sono dati dalle due puntine fisse e dalla punta del pennarello.



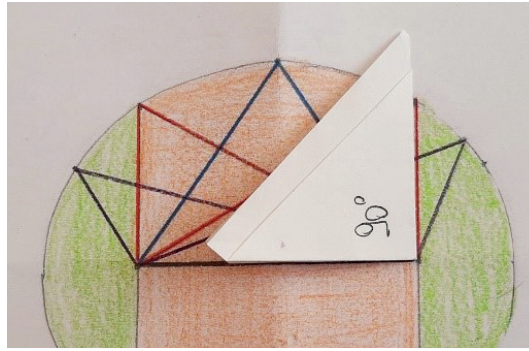
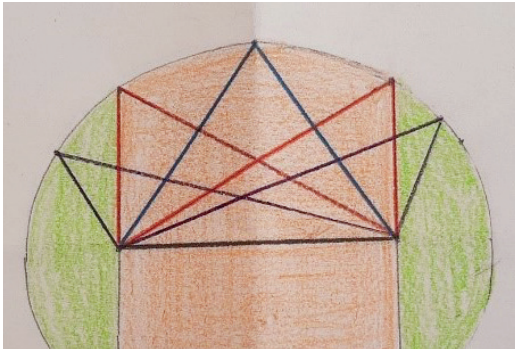
Gli infiniti triangoli all'interno dell'ellisse.

Possiamo quindi stimolare una discussione a piccoli gruppi, chiedendo agli alunni: «Quanti triangoli si individuano quando si rappresenta l'ellisse?» «Quali tipi di triangoli si formano?» «Quanti sono isosceli? Quanti rettangoli? E quanti ottusangoli?» «Si riesce a costruire triangoli equilateri?» «Che cosa hanno in comune i diversi triangoli? Che cosa hanno di diverso?» «Come varia l'area dei diversi triangoli? Quali triangoli hanno area maggiore? Perché?» «Quali triangoli hanno area minore? Perché?».

Quando tutti i gruppi avranno concluso la discussione, cercando di rispondere alle nostre sollecitazioni, sarà il momento di condividere le varie osservazioni e di istituzionalizzare le scoperte geometriche:

- **mentre si disegna l'ellisse si creano infiniti triangoli;**
- si riesce a ottenere tutti i tipi di triangoli tranne quello equilatero (per riuscire a ottenerlo, infatti, occorre studiare bene la lunghezza del segmento iniziale rispetto alla lunghezza del cappio);
- **gli infiniti triangoli che si creano hanno un lato in comune e lo stesso perimetro**, essendo tutti formati dallo stesso cappio;
- **nei vari triangoli cambiano le forme e anche le altezze relative al lato in comune e, dunque, le loro aree;**
- **l'area maggiore è quella dei due triangoli isosceli** che hanno un'altezza che passa per l'asse del segmento iniziale (hanno l'area maggiore perché a parità del lato in comune hanno l'altezza relativa maggiore);

- **l'area minore** è quella dei due triangoli degeneri, ossia quelli che hanno i tre punti allineati (hanno l'area minore, perché l'altezza rispetto al lato comune è 0 cm).



Produzioni delle allieve e degli allievi durante la discussione.

Possiamo ora osservare che, poiché tutti i triangoli hanno un lato in comune, **la somma delle due distanze di un qualsiasi punto dell'ellisse da ciascuno dei due estremi del segmento (detti fuochi) è costante**. Questo è ciò che caratterizza l'ellisse.

È anche possibile divertirsi a scoprire che cosa succede se si avvicinano o si allontanano le due puntine (i due fuochi), e che cosa succede se si fanno coincidere i due fuochi nello stesso punto: a parità di lunghezza del cappio, più i fuochi si allontanano e più l'ellisse diventa schiacciata (eccentrica), più si avvicinano e più l'ellisse assomiglia a un cerchio. **Quando le due puntine coincideranno in un unico punto si avrà il cerchio, che rappresenta proprio un caso particolare di ellisse.**

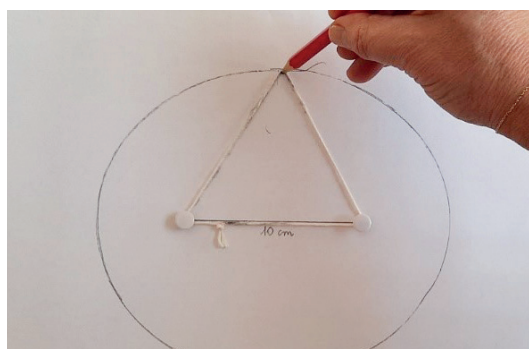
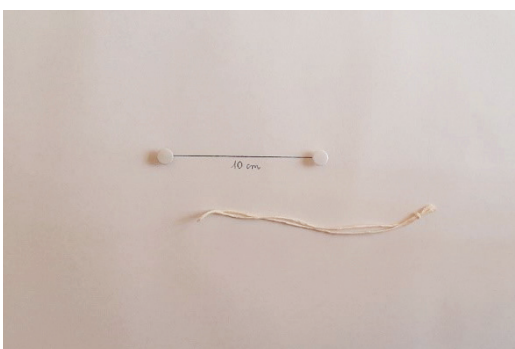
Triangoli equilateri nell'ellisse

Partendo dall'esperienza precedente, chiediamo ai vari gruppi di **studiare le misure del cappio e della distanza dei due fuochi per riuscire a individuare triangoli equilateri**.

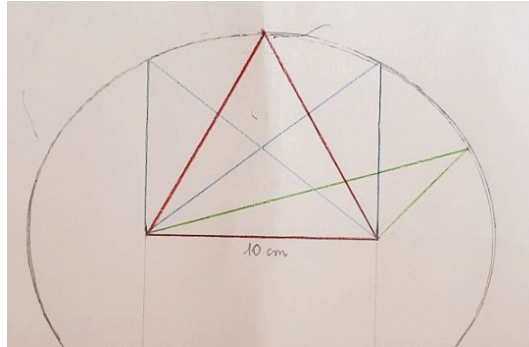
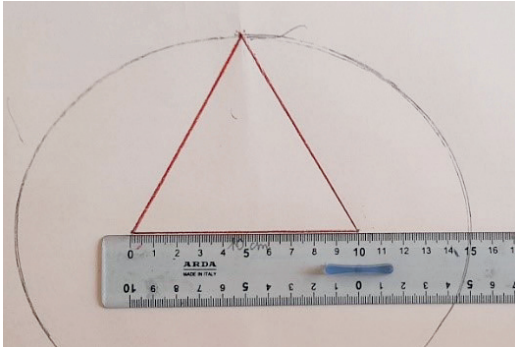
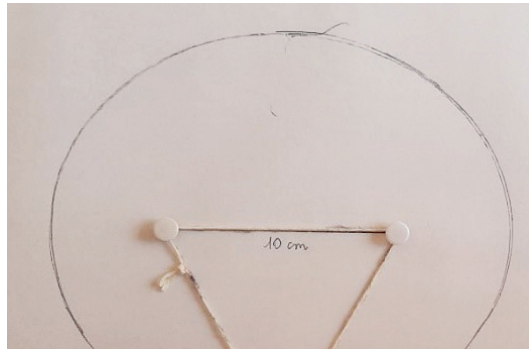
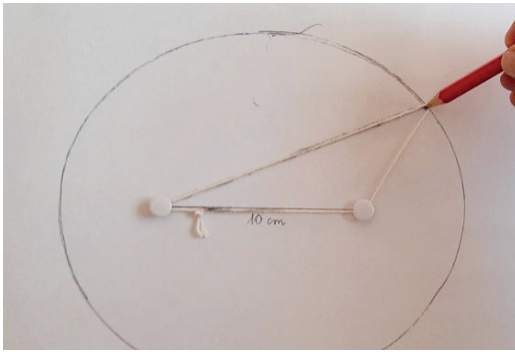
Dopo aver messo a disposizione il materiale, lasciamo che i gruppi sperimentino liberamente; se li vediamo in difficoltà, possiamo suggerire di preparare un cappio con lo spago lungo 30 cm, per poi individuare la distanza da tenere tra le due puntine. Considerando che 30 cm rappresenta il perimetro dei triangoli che si individueranno, diventerà facile stabilire la lunghezza del segmento che rappresenta la distanza dei due fuochi, dunque uno dei lati dei triangoli (10 cm).

Passeremo poi a verificare se effettivamente si riesce a ottenere triangoli equilateri:

- si disegna il segmento su un foglio A3;
- si appoggia il foglio sulla tavoletta di legno utilizzata nell'attività precedente;
- si posizionano le due puntine alle sue estremità;
- si procede a disegnare l'ellisse e a individuare se **tra i diversi tipi di triangoli che si visualizzano ci sono anche gli equilateri, che sono quelli che a parità di perimetro hanno area massima**.



Triangoli equilateri nell'ellisse.



Triangoli equilateri nell'ellisse.

Confronto tra triangoli isosceli ed equilateri

Nello svolgimento della prima attività abbiamo osservato che, tra gli infiniti triangoli individuati nell'ellisse, quelli isosceli hanno area maggiore a parità di perimetro. Nella seconda attività abbiamo visto che sono quelli equilateri ad avere questa caratteristica. Ora procediamo con un'esperienza che ci permette di scoprire quale figura, tra triangoli isosceli e equilateri, a parità di perimetro ha area maggiore.

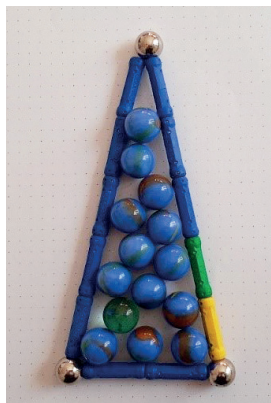
Per questa attività proponiamo di utilizzare:

- barrette magnetiche;
- sferette di acciaio;
- biglie di vetro della stessa dimensione.

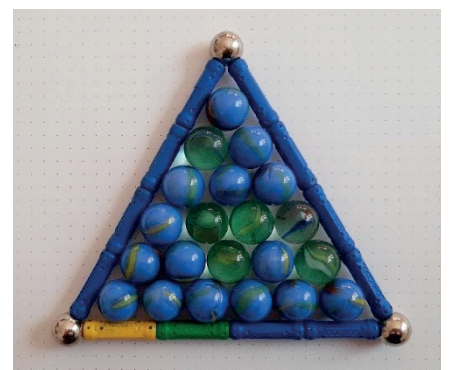
Le barrette magnetiche rappresenteranno l'unità di misura della lunghezza, le sferette di acciaio i vertici del triangolo, e la proiezione delle biglie l'unità di misura dell'area.

Con questo materiale chiediamo di rappresentare un triangolo isoscele generico di perimetro 12 u (barrette magnetiche), di posizionare al suo interno tutte le biglie di vetro che è possibile inserire e di contarle. Invitiamo poi gli alunni a formare un triangolo equilatero con 12 barrette magnetiche e a posizionare al suo interno il maggior numero di biglie che è possibile inserire e di contarle.

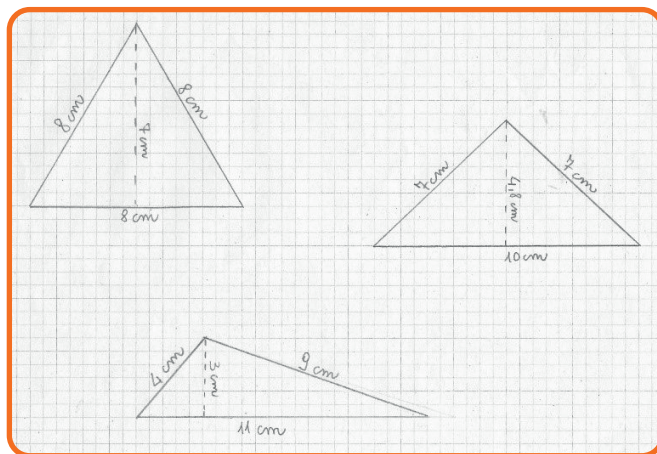
Si noterà così che nel triangolo equilatero ci stanno più biglie che **nel triangolo isoscele, quindi, a parità di perimetro, il triangolo equilatero ha area maggiore.**



Triangoli isosceli ed equilateri dello stesso perimetro e di area diversa.



Come ulteriore verifica potremmo chiedere di disegnare tre triangoli dello stesso perimetro: uno equilatero, uno isoscele e uno scaleno e di calcolarne l'area. Dopo aver individuato la lunghezza di un lato e la relativa altezza per ciascun triangolo, andremo a calcolare le aree dei tre triangoli: noteremo ancora una volta che, a parità di perimetro, è il triangolo equilatero ad avere l'area massima.

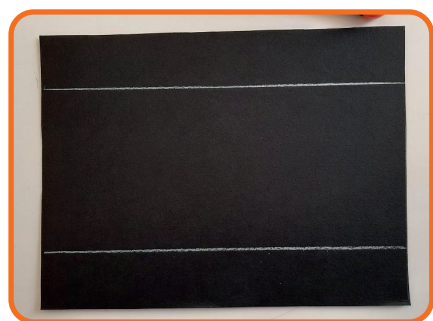


Triangoli dello stesso perimetro e di area diversa.

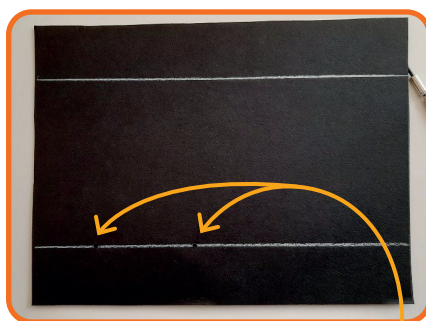
Triangoli della stessa area e di perimetro variabile

Disegniamo due rette parallele su un cartoncino abbastanza robusto di formato A5 (14,8 cm × 21 cm) o di dimensioni maggiori.

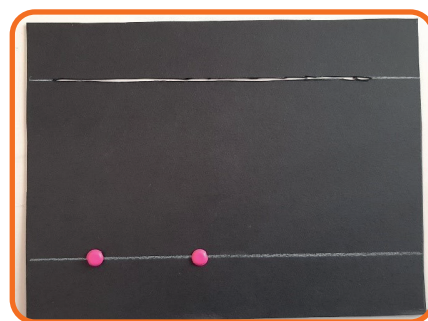
Su una delle due rette andremo a individuare due punti che costituiranno due vertici di un triangolo. Facciamo due fori con un punteruolo in corrispondenza di questi punti e infiliamo in ciascun foro un fermacampione. Sull'altra retta, lasciando circa 1,5 cm di margine sul cartoncino, pratichiamo un taglio con un taglierino, allo scopo di formare un binario nel quale far scorrere un fermacampione. Con un filo elastico creiamo un cappio per individuare un primo triangolo, poi facciamo scorrere il fermacampione sul taglio e osserviamo i triangoli che via via si formano.



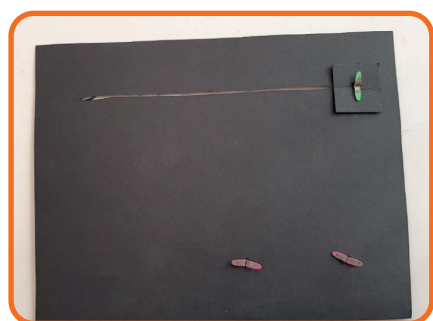
① *Tracciare due rette parallele.*



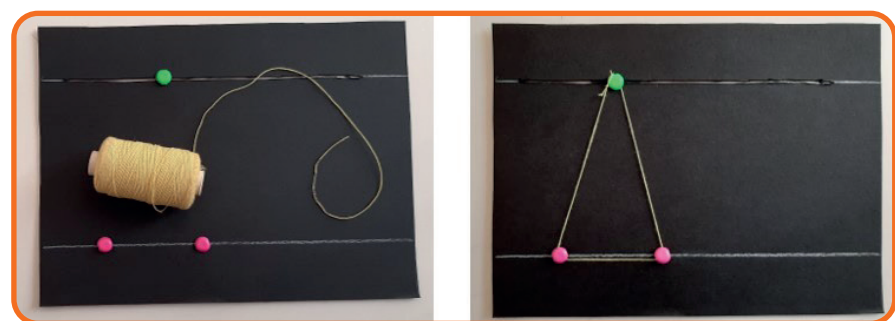
② *Su una retta individuare due punti a distanza a piacere e fare due fori.*



③ *Infilare due fermacampioni nei fori, lasciando un paio di millimetri di distanza tra la testa dei fermacampioni e il foglio. Con un taglierino praticare un taglio sulla seconda retta, lasciando un po' di margine agli estremi.*

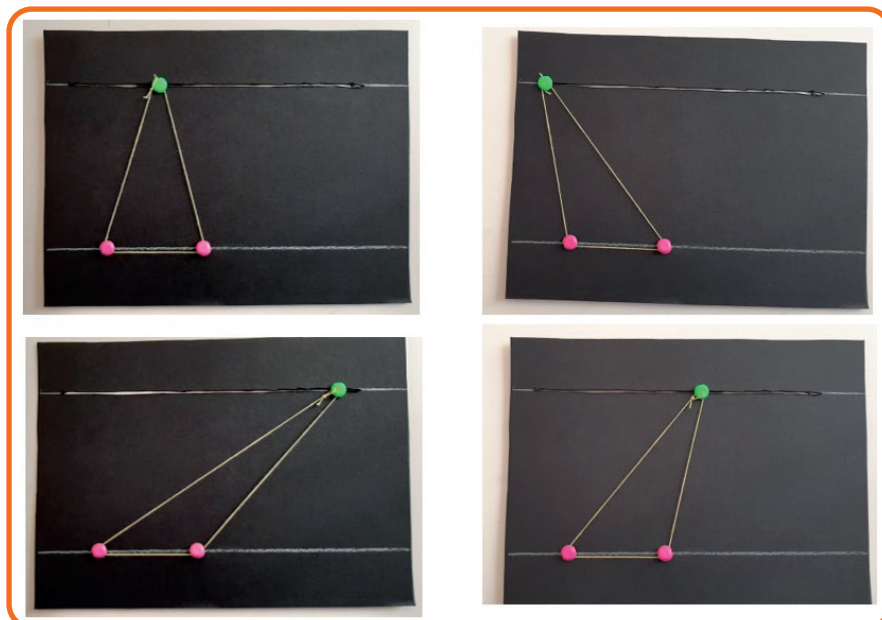


④ *Infilare un fermacampione nel taglio e fissarlo con un quadratino di cartoncino sul retro, in modo che possa scorrere senza uscire dal binario.*



⑤ *Far passare del filo elastico attorno ai fermacampioni e legarlo per formare un triangolo.*

Muovendo il filo elastico si individuano infiniti triangoli che hanno la stessa area, dato che hanno in comune un lato e la relativa altezza, e perimetro variabile.



Triangoli della stessa area e di perimetro diverso.

Con questa attività è possibile notare che **tra tutti i triangoli della stessa area quello di perimetro minimo è l'isoscele**: posizione nella quale il filo elastico non è in tensione.

Sarà il triangolo equilatero ad avere il perimetro minimo solo se si studia bene la distanza tra le due puntine fisse e tra le rette parallele.

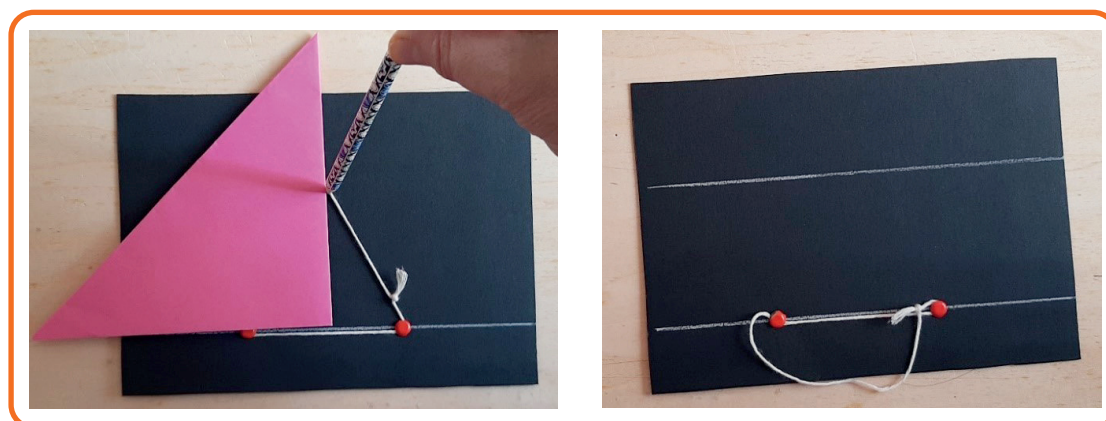
Chiediamo ora alla classe di predisporre un cappio di spago di lunghezza 24 cm che dovrà formare il contorno del triangolo equilatero e di individuare la lunghezza di un lato del triangolo equilatero.



Cappio lungo 24 cm per realizzare un triangolo equilatero.

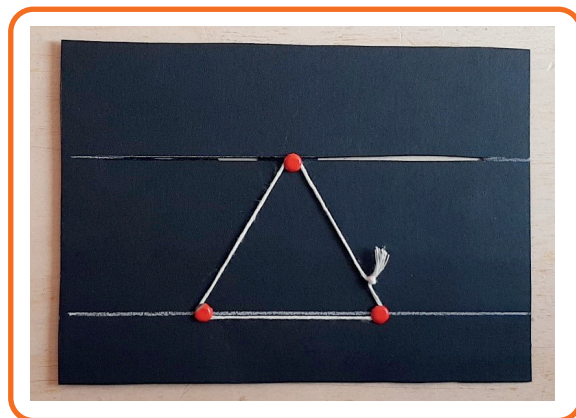
Si prende poi un cartoncino, si disegna una retta sulla quale vengono individuati i due estremi di un lato del triangolo lungo 8 cm, con il punteruolo si fanno due fori in corrispondenza degli estremi e poi si infila un fermacampione in ciascun buchino, in modo da individuare il lato che rimarrà fisso.

Lasciamo che le allieve e gli allievi lavorino in piccoli gruppi alla ricerca del punto che rappresenterà il terzo vertice di un triangolo equilatero, dal quale dovrà passare la retta parallela. Per individuare la posizione del terzo vertice si potrebbe utilizzare il cappio e una squadra.



Alla ricerca di un triangolo equilatero.

Una volta individuato il terzo vertice, tracciamo la seconda retta, parallela alla precedente, e procediamo come nell'attività descritta sopra, sostituendo però il cappio di spago con un cappio di filo elastico, così da poterlo tirare per ottenere vari tipi di triangoli. Saremo quindi in grado di osservare che **tra tutti i triangoli della stessa area quello equilatero ha il perimetro minimo.**



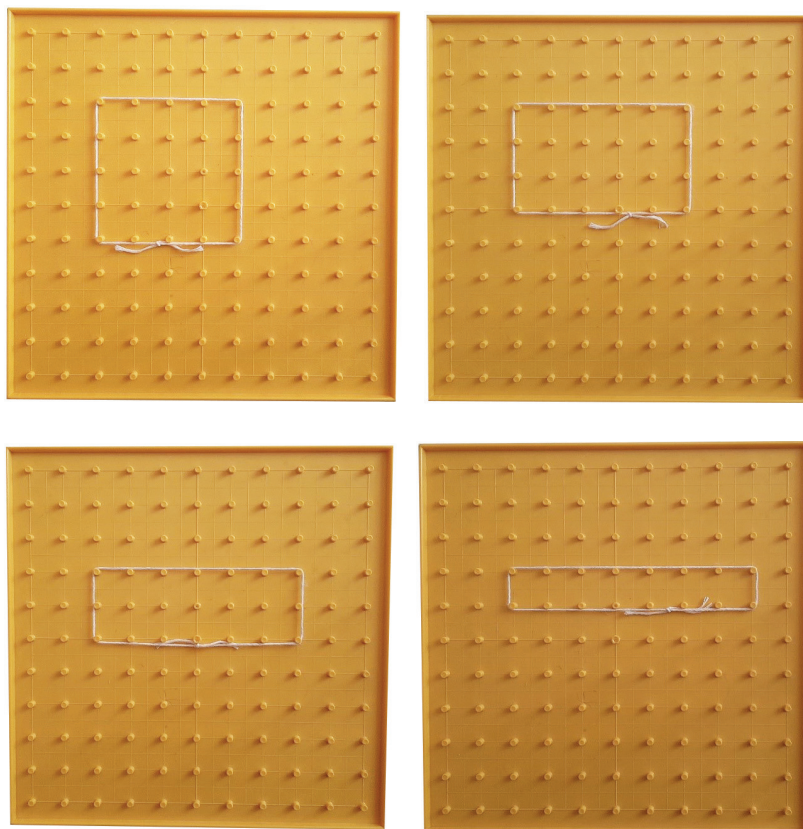
Triangolo equilatero che, a parità di area, ha il perimetro minimo.

Confronto tra rettangoli e quadrati

Ai vari gruppi poniamo la seguente domanda: «Due campi da gioco per bambini hanno forma diversa: uno quadrato e uno rettangolare, ma hanno lo stesso perimetro. Avranno anche la stessa area? Sarà indifferente andare a giocare nell'uno o nell'altro campo?».

Chiediamo di formulare delle ipotesi e di annotarle alla lavagna o alla lavagna digitale. Proponiamo infine un'attività laboratoriale per la verifica.

Consegniamo a ciascun gruppo un pezzo di spago e un geopiano, invitando a rappresentare un quadrato di lato 4 u, annodando lo spago nella maniera più precisa possibile, e a calcolare la sua area contando i quadratini all'interno. Chiediamo quindi di utilizzare lo stesso cappio di spago per rappresentare sempre sul geopiano dei rettangoli generici di forme diverse, di calcolare le loro aree e di confrontarle con quella del quadrato. Si scoprirà che, **a parità di perimetro, il quadrato ha l'area massima.**



Rettangoli e quadrato dello stesso perimetro e di area diversa.

Dopo l'attività sul geopiano, si può verificare la scoperta fatta su carta quadrettata: invitiamo gli studenti a disegnare due campi, uno rettangolare e uno quadrato, dello stesso perimetro e a calcolare la loro area. Proponiamo poi di rappresentare quadrati, rettangoli o qualsiasi altro quadrilatero dello stesso perimetro e di calcolare la loro area, così da confermare che **a parità di perimetro il quadrilatero di area massima è il quadrato.**

Confronto tra quadrilateri dello stesso perimetro e di area variabile

Analogamente a quanto fatto con i triangoli, per questa attività possiamo utilizzare le barrette magnetiche, le sferette di acciaio e le biglie di vetro. Si costruisce un quadrato di perimetro 12 barrette magnetiche; si posizionano poi al suo interno, fino a riempirlo, delle biglie di vetro di uguale dimensione che vanno contate.

Quadrato riempito da biglie.

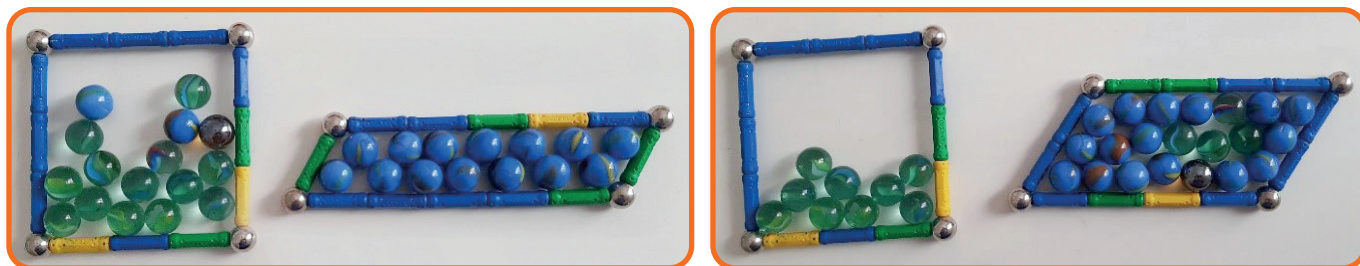


Con le 12 barrette e le 4 sferette di acciaio, chiediamo alla classe di costruire uno o più rettangoli dello stesso perimetro rispetto al quadrato e, di volta in volta, trasferiamo le biglie di vetro contenute all'interno del recinto quadrato dentro il recinto rettangolare. Si noterà che non tutte possono essere trasferite.



Quadrato e rettangoli dello stesso perimetro e di area diversa.

Con lo stesso materiale si costruisce un parallelogramma dello stesso perimetro del quadrato e si fa ciò che si è fatto in precedenza: anche in questo caso non tutte le biglie possono essere trasferite.

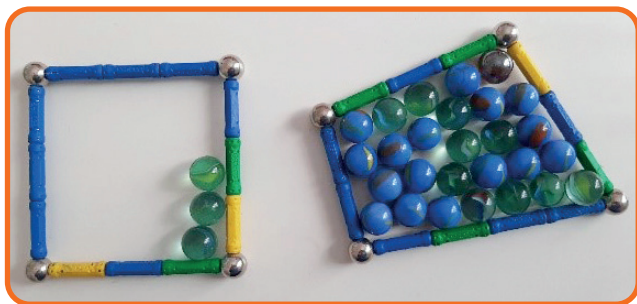


Quadrato e parallelogrammi dello stesso perimetro e di area diversa.

Si prova anche con un trapezio e con un quadrilatero generico e il risultato sarà sempre lo stesso: le biglie contenute dentro il recinto quadrato non riusciranno a stare tutte all'interno degli altri quadrilateri aventi lo stesso perimetro.



Quadrato e trapezi dello stesso perimetro e di area diversa.



Quadrato e quadrilatero generico dello stesso perimetro e di area diversa.

Dopo varie verifiche, potremo **istituzionalizzare** che, a parità di perimetro, il quadrato è il quadrilatero di area massima.

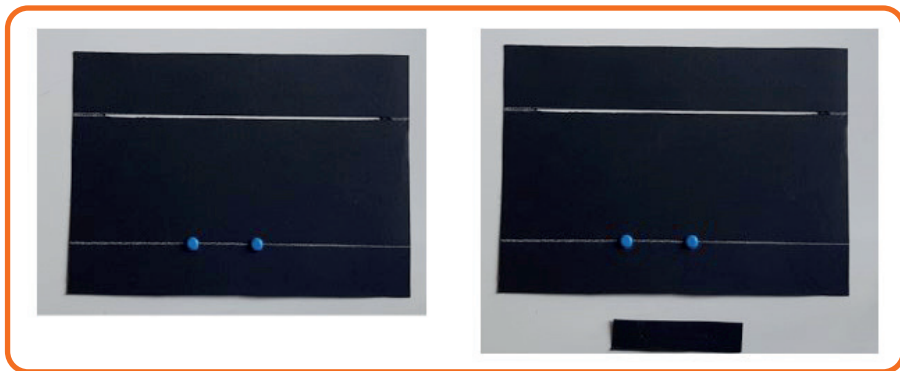
Quadrilateri con la stessa area e perimetro variabile

In analogia a ciò che si è fatto per i triangoli, possiamo costruire un modello dinamico per osservare parallelogrammi della stessa area di perimetro variabile.

Procuriamoci il seguente materiale:

- un cartoncino rigido A5 (14,8 cm × 21 cm) o più grande;
- 4 fermacampioni;
- del filo elastico e dello spago.

Si disegnano due rette parallele alla distanza che si vuole; su una retta si pratica un taglio per formare un binario, lasciando circa 1,5 cm di margine agli estremi. Sulla retta parallela si individuano due punti che vanno forati con un punteruolo. Si prepara poi un rettangolino di cartoncino sul quale vengono praticati due fori alla stessa distanza dei due punti precedenti.



Cartoncino con binario e rettangolino da posizionare sotto al binario.

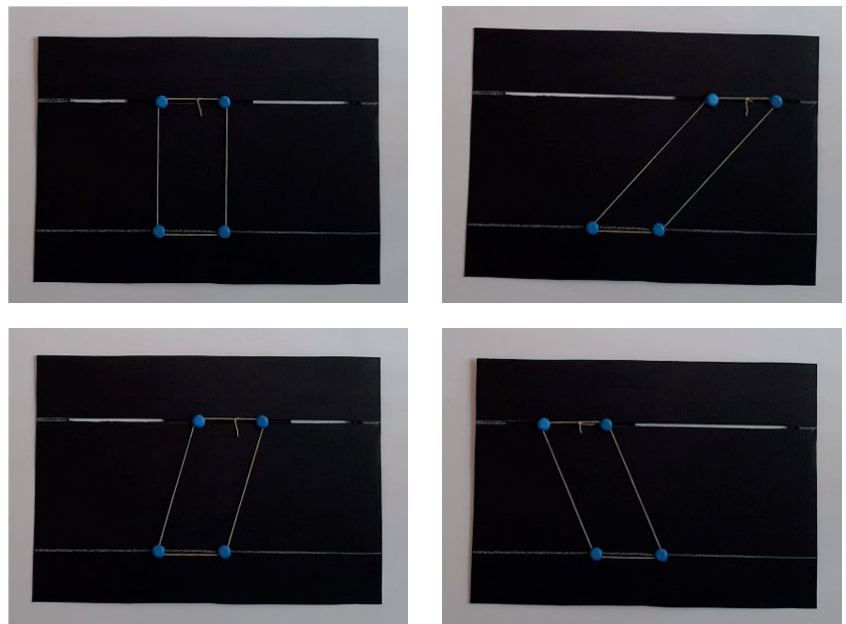
Infiliamo i due fermacampioni all'interno dei fori praticati sulla retta e due fermacampioni nel cartoncino che si dovrà posizionare sotto il binario.



Cartoncino fronte retro.

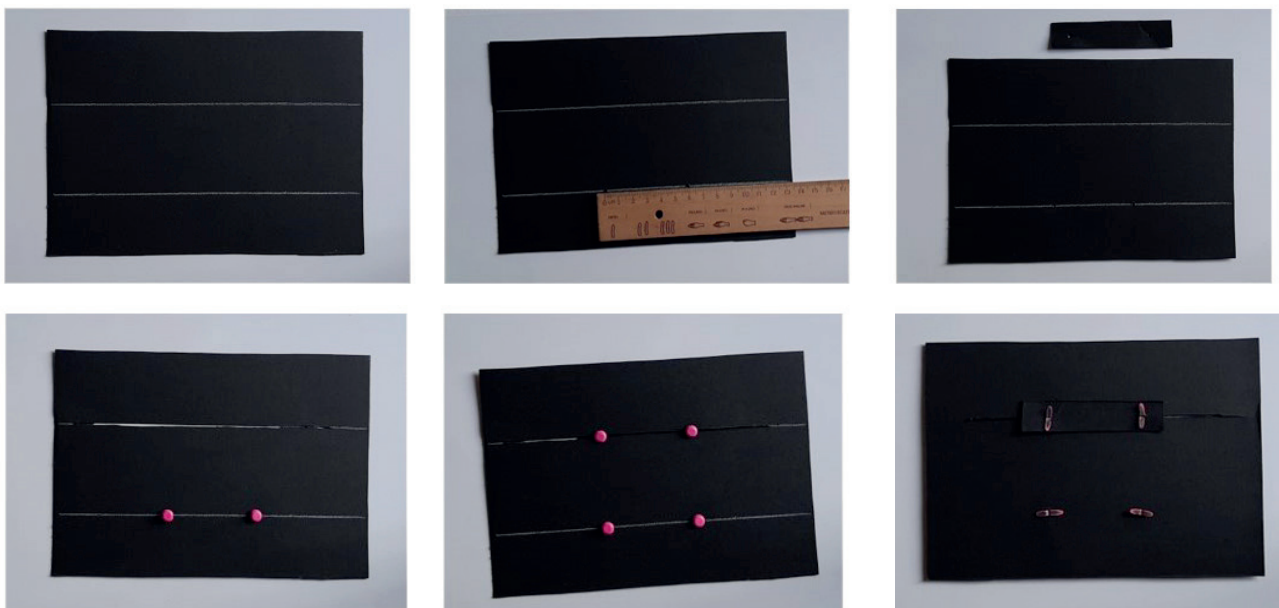
E adesso formiamo un cap-pio con il filo elastico, per individuare un primo parallelogramma. Facendo scorrere il lato che si trova sul binario, si noterà che il filo elastico si tende e si rilassa in base allo spostamento: l'area di tutti i parallelogrammi è la stessa, perché sono fisse le lunghezze di due lati paralleli e la distanza tra le due rette, dunque la relativa altezza, mentre il perimetro cambia.

Il rettangolo è il parallelogramma che a parità di area ha il perimetro minore.



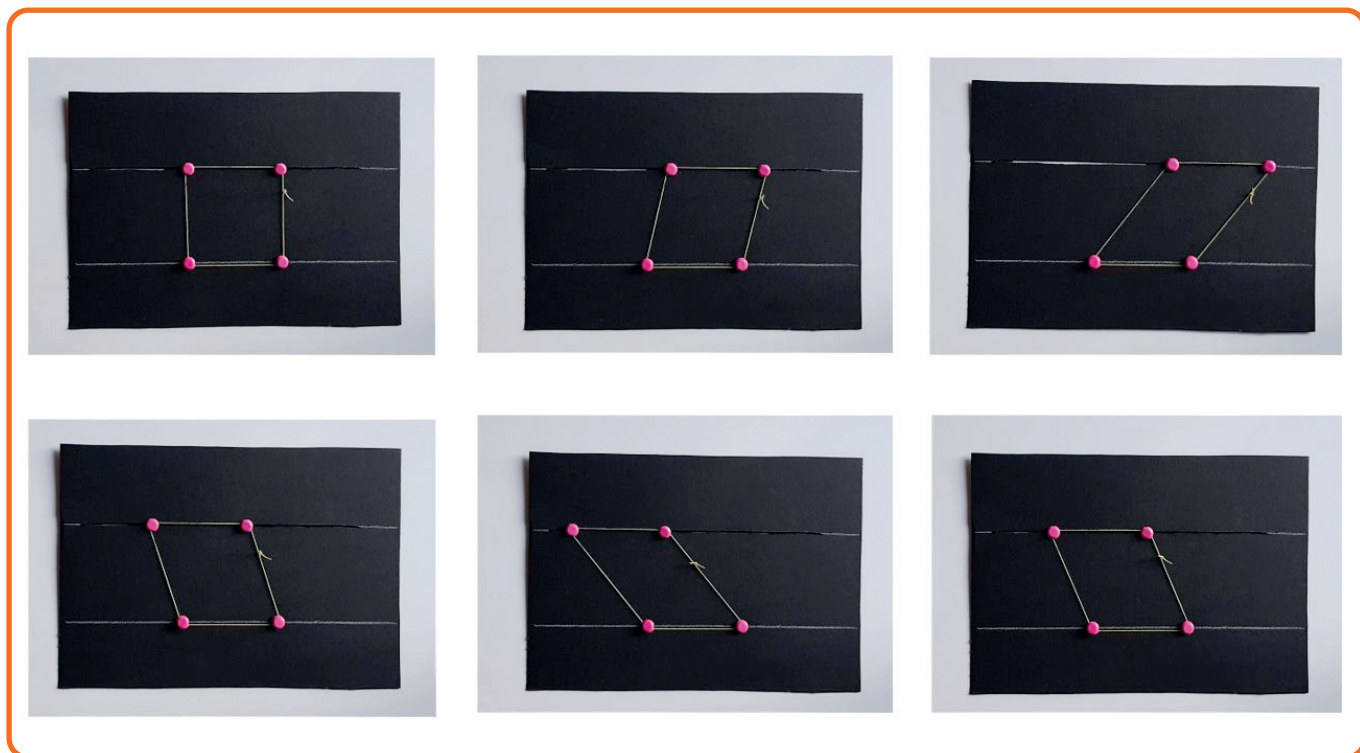
Parallelogrammi della stessa area e di perimetro diverso.

È inoltre interessante proporre di **scoprire come rappresentare un quadrato**. Lasciamo operare le allieve e gli allievi a piccoli gruppi, intervenendo solo se necessario con piccoli suggerimenti o con domande che guidano la riflessione. Si scoprirà che **è necessario disegnare le due rette parallele a una distanza pari alla lunghezza del segmento che rappresenta il lato del quadrato**. Nell'esempio che segue, il lato del quadrato è lungo 6 cm, così come la distanza delle due rette.



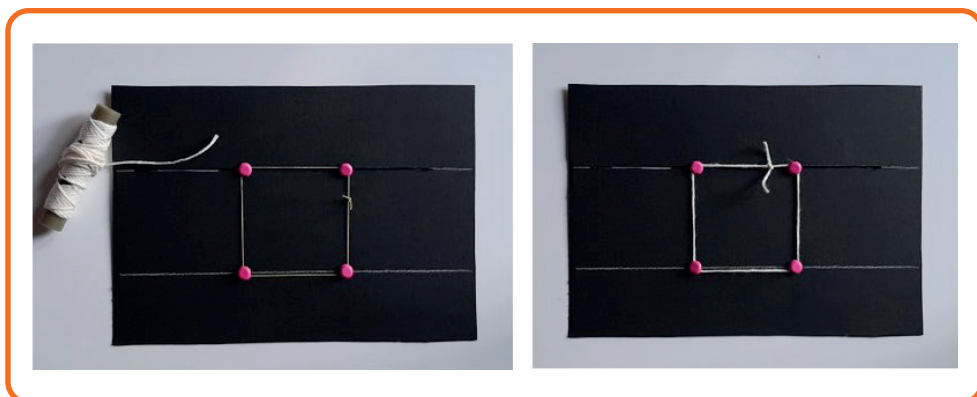
Costruzione del modello per rappresentare il quadrato.

Anche in questo caso, facendo scorrere i due vertici che si trovano sul binario, si nota l'allungamento del filo elastico.



Quadrato e parallelogrammi della stessa area e di perimetro diverso.

Se l'anello di filo elastico viene sostituito con lo spago, la figura diventa rigida e non scorre più lungo i binari.



Sostituzione del filo elastico con lo spago.

Ancora una volta possiamo verificare che, a parità di perimetro, il quadrilatero che ha l'area maggiore è quello regolare, ossia il quadrato, e che è sempre il quadrato che, a parità di area tra i vari quadrilateri, ha il perimetro minore.

A conclusione dell'attività, invitiamo le allieve e gli allievi a rappresentare su fogli quadrettati o sul geopiano (con spago ed elastici) quadrilateri dello stesso perimetro ma di area diversa e quadrilateri della stessa area ma di perimetro diverso.

Obiettivi di apprendimento

- Descrivere, denominare e classificare figure geometriche, identificando elementi significativi e simmetrie, anche al fine di farle riprodurre da altri.
- Riprodurre una figura in base a una descrizione, utilizzando gli strumenti opportuni (carta a quadretti, riga e compasso, squadre, software di geometria dinamica).
- Costruire e utilizzare modelli materiali nello spazio e nel piano come supporto a una prima capacità di visualizzazione.
- Utilizzare e distinguere fra loro i concetti di perpendicolarità, parallelismo, orizzontalità, verticalità.
- Determinare il perimetro di una figura utilizzando le più comuni formule o altri procedimenti.
- Determinare l'area di rettangoli e triangoli e di altre figure per scomposizione o utilizzando le più comuni formule.
- Rappresentare relazioni e dati e, in situazioni significative, utilizzare le rappresentazioni per ricavare informazioni, formulare giudizi e prendere decisioni.

Durata del percorso

- **Triangoli nell'ellisse:** 3 ore.
- **Triangoli equilateri nell'ellisse:** 1 ora.
- **Confronto tra triangoli isosceli ed equilateri:** 1 ora.
- **Triangoli della stessa area di perimetro variabile:** 1 ora e ½.
- **Confronto tra rettangoli e quadrati:** 1 ora.
- **Confronto tra quadrilateri dello stesso perimetro e di area variabile:** 1 ora.
- **Quadrilateri con la stessa area e perimetro variabile:** 2 ore.

Durata complessiva: 10 ore e ½ circa.

Materiali

Triangoli nell'ellisse: una tavoletta di legno morbido o di compensato (dello spessore di 0,6-1 cm) di dimensioni uguali o maggiori di un foglio A3 (29,7 cm × 42 cm); fogli A3; puntine da disegno; spago; pennarelli e/o pastelli.

Triangoli equilateri nell'ellisse: una tavoletta di legno morbido o di compensato (dello spessore di 0,6-1 cm) di dimensioni uguali o maggiori di un foglio A3 (29,7 cm × 42 cm); fogli A3; puntine da disegno; spago; pennarelli e/o pastelli.

Confronto tra triangoli isosceli ed equilateri: barrette magnetiche, sferette di acciaio e biglie di vetro; fogli di carta quadrettata (0,5 cm); riga, squadra.

Triangoli della stessa area di perimetro variabile: cartoncino abbastanza robusto di formato A5 (14,8 cm × 21 cm) o di dimensioni maggiori; fermacampioni; filo elastico colorato; spago; forbici; taglierino; punteruolo; riga e squadra; matite colorate se si lavora su cartoncino bianco, oppure matita bianca se si lavora su cartoncino nero o blu.

Confronto tra rettangoli e quadrati: geopiano (uno ogni gruppo di alunni); spago; fogli quadrettati (0,5 cm); riga e squadra; matite.

Confronto tra quadrilateri dello stesso perimetro e di area variabile: barrette magnetiche, sferette di acciaio e biglie di vetro.

Quadrilateri con la stessa area e perimetro variabile: cartoncino abbastanza robusto di formato A5 (14,8 cm × 21 cm) o di dimensioni maggiori; fermacampioni; filo elastico colorato; spago; forbici; taglierino; punteruolo; riga e squadra; matite colorate se si lavora su cartoncino bianco, oppure matita bianca se si lavora su cartoncino nero o blu; fogli quadrettati (0,5 cm); riga e squadra; matite; geopiano.

Per tutte le attività è utile avere a disposizione un monitor interattivo (digital board) o una LIM per facilitare la condivisione dei materiali.

Per saperne di più

Cottino L., Gualandi C., Nobis C., Ponti A., Ricci M., Sbaragli S., Zola L. (2023). *Geometria*. Bonomo editore.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*, 2, 165-190.

<http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/519%20area%20e%20perimetro%20pdf.pdf>

Fandiño Pinilla M.I., D'Amore, B. (2023). *Le relazioni tra area e perimetro dei poligoni. Alcune riflessioni matematiche, storiche e didattiche*. Bonomo editore.

Martini B., Sbaragli S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica*. Tecnodid.

* Lorella Campolucci è coordinatrice del gruppo *Matematica in Rete (MiR)* di Corinaldo (AN); già docente presso la scuola primaria "A. Api" di Ostra Vetere - I.C. Corinaldo.

* Silvia Sbaragli è responsabile del Centro competenze Didattica della Matematica del Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI di Locarno, Svizzera.