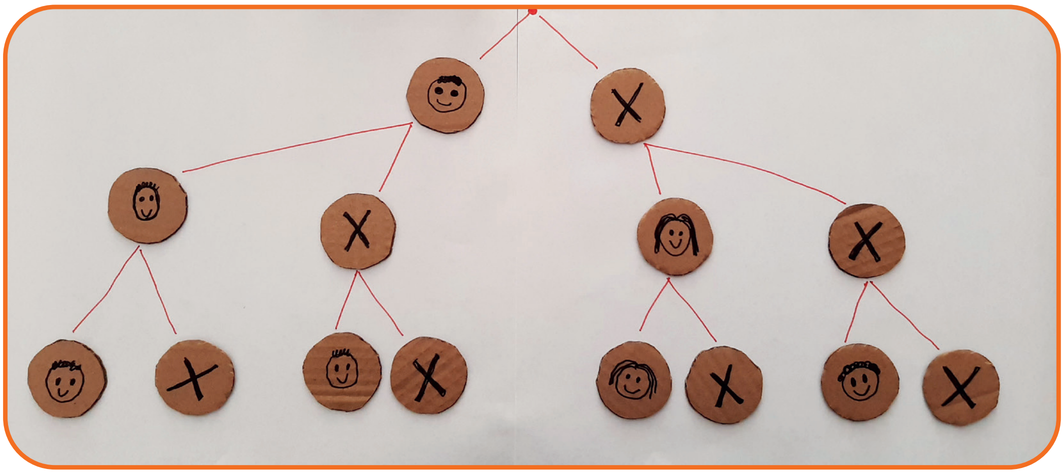
Combinatoria per i più grandi:
varie disposizioni e combinazioni

di Lorella Campolucci e Silvia Sbaragli

Per citazione: Campolucci L. & Sbaragli S. (2025). Combinatoria per i più grandi: varie disposizioni e combinazioni. Gaia Edizioni Scuola.
https://missioneinsegnante.it/2025/05/07/combinatoria-per-i-piu-grandi-disposizioni-e-combinazioni/



Disposizioni (senza ripetizione)

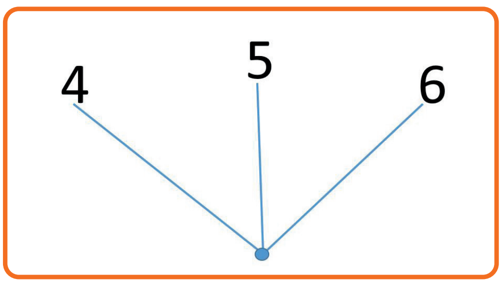
Le prime due attività di questa uscita riguardano **le disposizioni, cioè una sequenza ordinata di un certo numero di elementi distinti a partire da un numero maggiore di elementi di partenza**. Ogni sequenza si distingue dalle altre per almeno un elemento diverso, oppure per l'ordine in cui gli elementi si presentano. In queste due proposte gli elementi non vengono ripetuti (**senza ripetizione**).

Disponiamo numeri

Iniziamo dalla **costruzione di tutti i numeri di 2 cifre formati dalle tre cifre 4, 5 e 6**. Chiediamo quali e quanti numeri si possono costruire, senza ripetizione di cifre. Se sono state svolte le esperienze proposte nelle precedenti uscite di questo blog, la richiesta risulta semplice: i numeri che si possono ottenere sono i seguenti sei.

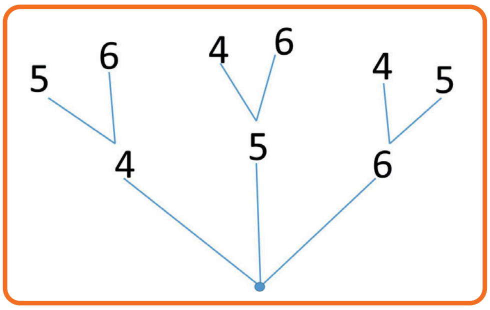
45	54	64
46	56	65

Dopo aver osservato i numeri, possiamo fare insieme la seguente riflessione: per la cifra da collocare nella prima posizione si hanno 3 scelte possibili (4, 5 o 6), ma una volta scelta la prima cifra si hanno solo 2 scelte per la seconda posizione. Dunque, **in tutto: 3 × 2 = 6 possibilità**.
Con il diagramma ad albero si riesce a visualizzare il ragionamento: si inizia con tre rami (uno per la cifra 4, uno per la cifra 5 e uno per la cifra 6).



I primi tre rami del diagramma ad albero.

Proseguiamo creando solo due rami per ogni ramo precedente, dato che nelle disposizioni senza ripetizione le cifre non si ripetono.



Il diagramma completo.

Successivamente si propone la seguente situazione. «*Le cifre a disposizione questa volta sono 4. Quali e quanti numeri di 2 cifre si possono ottenere?*».
Invitiamo le/gli allieve/i a **scegliere 4 cifre diverse fra loro e a ottenere tutti i numeri di 2 cifre, senza ripetizione, e a individuarne il numero**. Per esempio con le cifre 1, 2, 3 e 4 si ottengono i seguenti 12 numeri di 2 cifre.

12	21	31	41
13	23	32	42
14	24	34	43

In questo caso, per la cifra nella prima posizione si hanno 4 possibili scelte (1, 2, 3 o 4), nella seconda posizione se ne hanno di conseguenza 3, quindi **in tutto si hanno: 4 × 3 = 12 numeri**.
A questo punto possiamo proporre alle/agli allieve/i di disegnare sul quaderno il diagramma ad albero della situazione.

Sollecitiamo ad **individuare i numeri di 3 cifre, senza ripetizione, scegliendo tra 4 cifre differenti, ad esempio 4, 5, 6 e 7, così da stabilire quanti e quali numeri si riescono a ottenere**. Questa volta le/gli allieve/i potrebbero essere pronte/i per individuare prima quanti sono questi numeri e successivamente quali sono: per la cifra nella prima posizione si hanno 4 scelte possibili, nella seconda posizione 3 scelte possibili e nella terza posizione 2, quindi **si hanno in tutto: 4 × 3 × 2 = 24 numeri**. I numeri sono i seguenti:

456	546	645	745
457	547	647	746
465	564	654	754
467	567	657	756
475	574	674	764
476	576	675	765

Stimoliamo ora la riflessione con questa domanda: «*E se dovessimo individuare i* ***numeri di 3 cifre avendo a disposizione 5 cifre diverse, quanti e quali numeri si dovrebbero ottenere?***».
Si può a questo punto intuire direttamente, seguendo il ragionamento precedente, che **i numeri sono: 5 × 4 × 3 = 60**. Infatti, nella prima posizione si può scegliere tra 5 cifre, nella seconda posizione tra 4 e nella terza posizione tra 3.
Come già anticipato nelle precedenti uscite, **è importante che i ragazzi acquisiscano un modo ordinato di procedere per individuare tutte le possibilità e che sperimentino rappresentazioni diverse** (tabelle, diagrammi, elenchi ecc.), valutando poi i vantaggi e gli svantaggi che ogni rappresentazione può offrire rispetto ad un'altra in ogni distinta situazione.

Indovina la password

Con questa proposta ludica, continuiamo a riflettere sulle disposizioni di elementi senza ripetizione. Proponiamo a ciascun/a allievo/a di procurarsi una scatolina bianca, tipo quella dei medicinali, da aprire e rovesciare per avere all'esterno la parte bianca (spigoli lunghi circa 10 cm × 7 cm × 2,5 cm). Mettiamo a disposizione delle tempere, così da consentire a ciascuna/o di pitturare la propria scatolina del colore che preferisce. Asciugata la tempera, si forniscono ad ognuno 6 dischetti di carta adesiva rotondi (circa 17 mm di diametro) o rettangolari (circa 20 mm × 12 mm) e chiediamo di scegliere 3 diverse lettere dell'alfabeto e 3 numeri di una cifra, tutti diversi tra loro, da scrivere nei sei dischetti. Questi dovranno essere attaccati alla scatolina (lasciando un pochino di spazio per eventuali aggiunte di lettere e/o numeri), in modo da costruire una specie di telecomando.

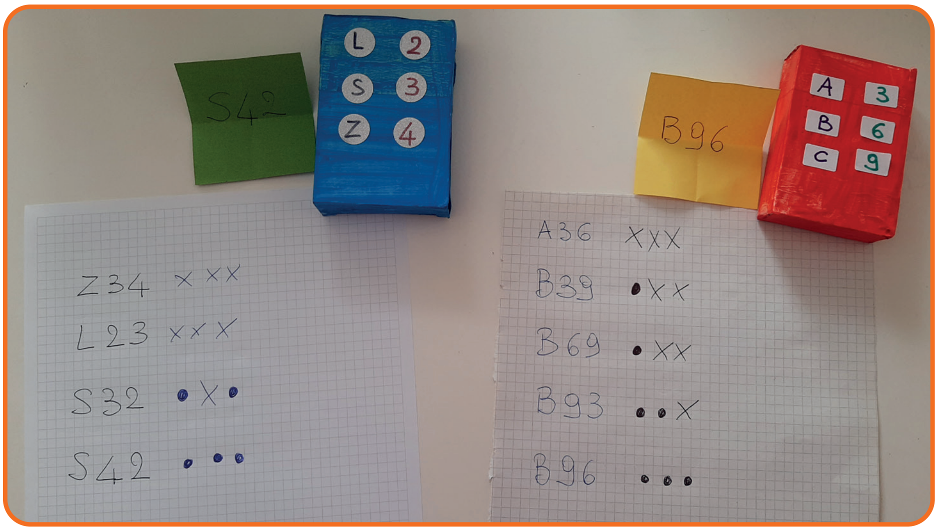
Esempi di telecomandi costruiti con scatoline di recupero.

Quando tutti avranno realizzato un personale telecomando, si chiederà di creare una password segreta da "digitare" sul telecomando, formata da una lettera e da un numero di due cifre diverse tra loro, e di scriverla su un foglietto da ripiegare e da mettere al sicuro.
Per esempio, facendo riferimento alla "tastierina" del telecomando azzurro che si vede nell'immagine, la lettera può essere scelta tra L o S o Z e le due cifre del numero tra 2, 3 e 4, senza ripetizioni.
Ci si sfida poi, uno contro uno, a **"indovina la password"**.
Entrambi gli sfidanti avranno a disposizione un foglio e una matita e ciascuno potrà vedere il telecomando dell'altro. Stabilito chi inizia, il primo scriverà una possibile password del/della compagno/a sul suo foglio. Lo sfidante, dopo aver controllato, segnerà accanto alla password una crocetta se la lettera o la cifra sono sbagliate (non sono quelle della password o si trovano in posizioni diverse), un pallino se sono corrette (devono essere corrette sia la cifra o la lettera indicata, sia la posizione).
Di seguito un esempio riferito al telecomando azzurro dell'immagine con la password scelta "S42":
Z34 ××× (tre crocette perché lettera e numero non sono corretti).
Poi verrà il turno del secondo giocatore che scrive a sua volta quella che pensa possa essere la password scelta dalla/dal compagna/o; in seguito lei/lui segnerà le crocette e/o i pallini relativi, e si continuerà così fino a quando i due giocatori individueranno le due password. Vince chi, tra i due giocatori, indovina la password con il minor numero di tentativi.
Riportiamo di seguito un esempio di partita in cui si deve indovinare la password del giocatore con il telecomando azzurro riportato nell'immagine.

Z34 ×××
L23 ×××
S32 •×•
S42 •••

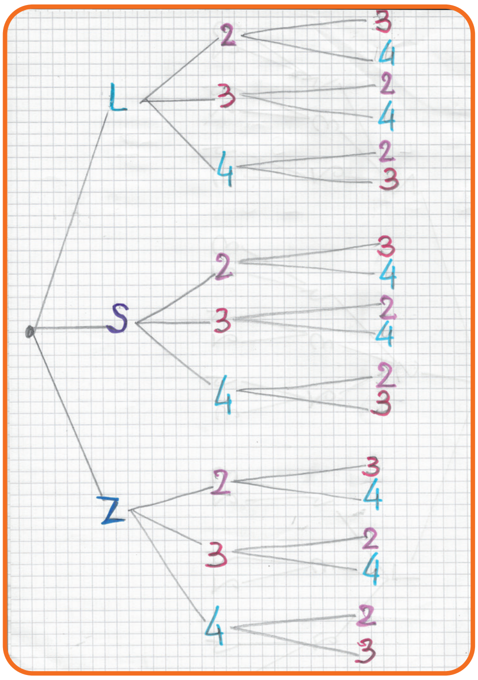
Se, come nell'esempio sopra, il primo giocatore indovina la password del compagno al quarto tentativo, anche il secondo giocatore deve poter fare il quarto tentativo: se anche lei/lui individua la password sono pari, altrimenti la partita finisce con la vittoria del primo.

Nell'immagine seguente, il giocatore con il telecomando rosso ha indovinato la password del giocatore con il telecomando azzurro in 4 tentativi, mentre il compagno ha avuto bisogno di 5 tentativi, quindi vince la partita il giocatore con il telecomando rosso.



Esempio di partita.

In seguito si cambiano le coppie di giocatori, così da incontrare sempre sfidanti e password diverse.
Dopo qualche partita, chiederemo ad ognuno di **individuare quante e quali sono tutte le possibili password proponibili e di rappresentarle nel modo ritenuto più efficace**.
Se è stato svolto il lavoro precedente, le/gli allieve/i potranno individuare la seguente operazione: 3 sono le possibili scelte per le lettere da inserire nella prima posizione della password, 3 le possibili scelte per la prima cifra (seconda posizione della password) e 2 le possibili scelte per la seconda cifra (terza posizione della password), quindi **si avranno 3 × 3 × 2 = 18 possibili password**.



Rappresentazione delle possibili password.

Telecomando con 3 lettere e 4 cifre.

Poi chiederemo di aggiungere una cifra alla tastierina del telecomando così da **avere a disposizione 3 lettere (L, S, Z) e 4 cifre (2, 3, 4, 7) e di ipotizzare quante password diverse, sempre formate da una lettera e da un numero di 2 cifre diverse tra loro si potranno creare**.

Si può lasciare che le/gli allieve/i lavorino individualmente oppure a piccoli gruppi per favorire il confronto, lasciandoli liberi di rappresentare la situazione come preferiscono. Ci sarà chi ripete la rappresentazione del diagramma ad albero, chi tenterà di scrivere tutte le possibili password, ma magari presto si stancherà e lascerà il lavoro incompiuto, e anche chi, ripensando alle precedenti attività, imposterà direttamente **l'operazione 3 × 4 × 3 = 36, trovando così tramite un calcolo il numero delle possibili password**.

Oppure, se si preferisce, è possibile proporre il seguente diagramma ad albero da completare (allegato 1), che può facilitare l'operazione da effettuare.

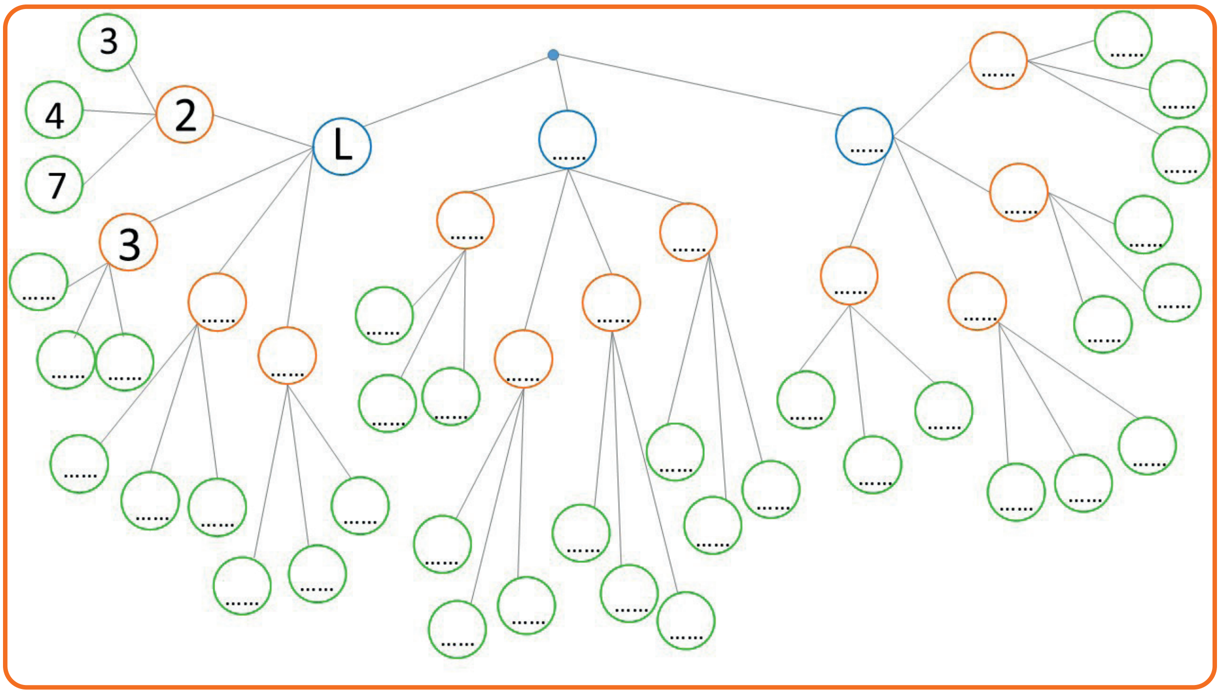


Diagramma ad albero da completare.

Può essere interessante in seguito proporre una nuova partita a "indovina la password", perché il gioco diventa più sfidante, dato che ci sono più possibilità.

Se le/gli allieve/i si appassionano, possiamo invitarle/i a **trovare il numero delle password che si possono ottenere aumentando di volta in volta le lettere o le cifre**, come rappresentato nella seguente tabella.

	3 cifre	4 cifre	5 cifre	6 cifre
3 lettere	3 × 3 × 2 = 18	3 × 4 × 3 = 36	3 × 5 × 4 = 60	3 × 6 × 5 = 90
4 lettere	4 × 3 × 2 = 24	4 × 4 × 3 = 48	4 × 5 × 4 = 80	4 × 6 × 5 = 120
…	…	…	…	…

La riflessione potrebbe suscitare un certo interesse e condurre ciascuno a riflettere sulle password che si utilizzano per accedere a siti protetti, sul perché si chiede che abbiano una lunghezza minima, oppure perché si chiede di abbinare simboli particolari ecc.

Disposizioni (con ripetizione)

Le seguenti due attività sono sempre **disposizioni**, ma questa volta viene contemplata la possibilità di ripetere gli elementi (**con ripetizione**).

Il gioco delle monete

Allieve e allievi giocano questa volta in piccoli gruppi; a ciascuno si assegnano delle monete di plastica, se sono disponibili a scuola, oppure dei dischetti di cartoncino sui quali si chiede di disegnare su una faccia una testa (T) e sull'altra una croce (C).

Invitiamoli poi a **scoprire quali e quante sono le disposizioni diverse di 2 monete, messe una accanto all'altra, e di rappresentarle come preferiscono**. In questo caso la ripetizione è possibile.

Avremo quindi che nella prima posizione ci può essere testa (T) o croce (C), così come nella seconda, quindi **le disposizioni possibili sono 2 × 2 = 4**.

TT
TC
CT
CC

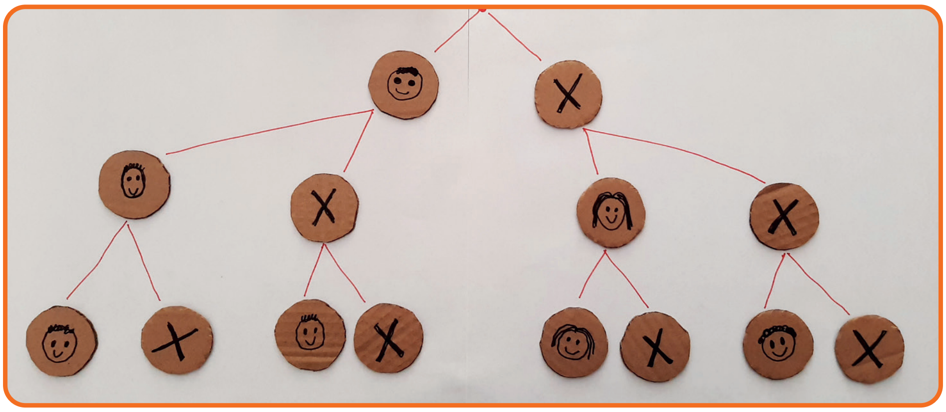
Tutte le disposizioni possibili con 2 monete.

Chiediamo poi di **aggiungere una terza moneta e di individuare ancora una volta quante e quali sono le disposizioni possibili delle tre monete, poste una accanto all'altra**. Anche in questo caso ci sono 2 possibilità per la prima posizione, 2 per la seconda e 2 per la terza, pertanto **si avranno 2 × 2 × 2 = 8 possibilità**.

TTT		CTT
TTC		CTC
TCT		CCT
TCC		CCC

Tutte le disposizioni possibili con 3 monete.

Se sono state svolte le attività precedenti, è possibile che alcune/i allieve/i facciano ricorso al diagramma ad albero per individuare tutte le possibili disposizioni.



Rappresentazione con il diagramma ad albero di tutte le possibili disposizioni con 3 monete.

A questo punto è possibile **aggiungere una quarta moneta e chiedere come è possibile calcolare il numero di tutte le possibili disposizioni, prima di individuare quali sono**. Alcune/i allieve/i potrebbero aver intuito che ci sono due possibilità per ogni posizione, per cui **si avranno 2 × 2 × 2 × 2 = 16 disposizioni diverse**.

Procedendo in modo ordinato, le/gli allieve/i potranno individuare tutte le possibilità senza difficoltà.

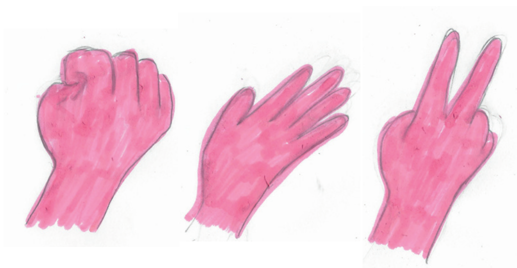
TTTT	CCCC
TTTC	CCCT
TTCT	CCTC
TTCC	CCTT
TCTT	CTCC
TCTC	CTCT
TCCT	CTTC
TCCC	CTTT

È bene continuare a solleticare la curiosità e a stimolare il ragionamento lanciando nuove sfide del tipo: «*Cosa succederà se si aggiunge un'altra moneta?; E se facessimo il gioco con 8 monete, quante disposizioni potremmo ottenere?*». **È possibile disegnare alla lavagna una tabella come la seguente, riportare i dati ottenuti con 2, 3 e 4 monete e chiedere di completare la tabella fino a 8 monete, spiegando di volta in volta il ragionamento che viene fatto.**

n. monete	n. disposizioni con ripetizioni
2	2 × 2 = 4
3	2 × 2 × 2 = 8
4	2 × 2 × 2 × 2 = 16
5	…
6	…
7	…
8	…

Sasso, carta e forbici

Proponiamo di giocare alla **morra cinese**, un gioco generalmente molto conosciuto. Se per qualcuno dovesse essere nuovo, spieghiamo che si gioca a coppie attraverso dei semplici gesti di una delle due mani: per rappresentare il sasso si deve tenere il pugno chiuso, per la carta la mano aperta con le dita tese, per le forbici la mano chiusa con l'indice e il medio sollevati a formare una forbice (una V). Si tengono entrambe le mani dietro la schiena e al via si fanno due gesti simultanei con una sola mano per ogni giocatore.



Sasso, carta e forbici.

Per vincere la *manche*, spieghiamo che il sasso vince sulle forbici, perché le spezza; la carta vince sul sasso, perché lo avvolge; le forbici vincono sulla carta, perché la tagliano. Nel caso in cui entrambi i giocatori facciano lo stesso gesto, si ottiene un pareggio. Stabiliamo il punteggio da conquistare e lasciamo che i bambini giochino a coppie.
Concluso il gioco chiediamo di individuare tutte le possibili disposizioni e di rappresentarle a piacimento.

SASSO SASSO	CARTA CARTA	FORBICI FORBICI
SASSO CARTA	CARTA FORBICI	FORBICI SASSO
SASSO FORBICI	CARTA SASSO	FORBICI CARTA

Tutte le disposizioni possibili del gioco sasso, carta e forbici.

Si individuano tutte le 9 coppie (3 × 3) in cui il primo elemento indica la scelta del primo giocatore e il secondo quella del secondo giocatore; infatti, per esempio, se si fa sasso-forbici vince il primo giocatore, invece, se si fa forbici-sasso vince il secondo.

È interessante osservare e confrontare le varie rappresentazioni scelte dalle/dagli allieve/i: alcuni potrebbero aver disegnato gli oggetti o le mani, altri potranno aver scritto le lettere iniziali come proposto di seguito, altri potrebbero aver fatto altre scelte creative.

Sasso → S; carta → C; forbici → F.

SS	CC	FF
SC	CF	FS
SF	CS	FC

Combinazioni (senza ripetizioni)

Le due seguenti attività riguardano le **combinazioni**, ossia **raggruppamenti di un certo numero di elementi distinti a partire da un numero maggiore di elementi di partenza, nei quali l'ordine degli elementi non è importante**. In queste due proposte gli elementi non vengono ripetuti (**senza ripetizione**).

Una gita al parco avventura

Proponiamo ora tre situazioni problema, tutte ambientate in un parco avventura. Si tratta di situazioni che allieve/i potrebbero incontrare anche nella realtà, per esempio per organizzare un'uscita di fine anno o una festa con gli/le amici/che.

Ecco la prima situazione.

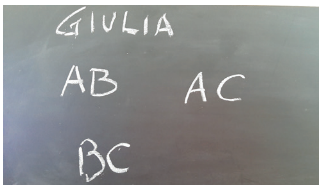
Il "Parco avventura junior" è un bellissimo parco avventura immerso nel verde rivolto a bambine e bambini, ragazze e ragazzi dai 6 ai 12 anni. In questo parco ci si può divertire all'aria aperta, vivendo bellissime attività divise per fascia d'età e per livello di difficoltà.
Giulia desidera andarci da tanto tempo, per questo per il suo sesto compleanno i nonni le hanno regalato un biglietto per effettuare due attività a scelta tra le seguenti proposte rivolte alle bambine e ai bambini dai 6 agli 8 anni.

A) Caccia al tesoro nel bosco dei folletti.
B) Gara di minigolf.
C) Percorso in sella al pony.

Giulia è felicissima, ma è indecisa su cosa scegliere. Vorrebbe fare tutto, ma può scegliere solo due attività. Quante e quali sono le coppie di attività che può scegliere?

Chiediamo di ipotizzare le scelte di Giulia e in seguito apriamo il confronto e registriamo le proposte alla lavagna. Ben presto si scoprirà che **Giulia ha solamente le seguenti tre possibili scelte** da fare.

AB → Caccia al tesoro nel bosco dei folletti – Gara di minigolf
AC → Caccia al tesoro nel bosco dei folletti – Percorso in sella al pony
BC → Gara di minigolf – Percorso in sella al pony



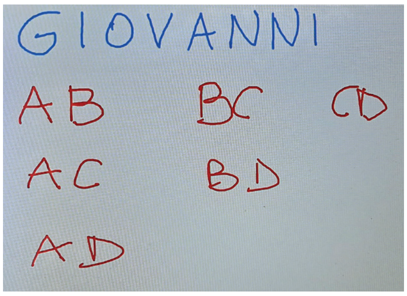
Le scelte possibili di Giulia di 2 attività su 3.

Ecco, quindi, la seconda situazione.

La prossima settimana Giovanni compirà 10 anni e vuole festeggiare il suo compleanno al "Parco Avventura junior" con i suoi amici Enrico, Emma, Agnese e Martina.
I genitori di Giovanni sono d'accordo, ma dicono a Giovanni che, per riuscire a contenere un po' i costi, deve scegliere solo due attività tra quelle rivolte a ragazzi della sua età.
Le proposte per ragazze e ragazzi dai 9 agli 11 anni sono le seguenti:
A) Caccia al tesoro nel bosco del tesoro perduto.
B) Gara di minigolf.
C) Gran premio con go-kart a pedali.
D) Il villaggio sugli alberi.
Giovanni è molto indeciso, vuole fare la scelta migliore, quella che farà divertire di più lui e i suoi amici.
Ci pensa e ci ripensa, poi, per essere sicuro di aver valutato tutte le opzioni, si scrive tutte le possibili combinazioni. Quali sono secondo voi? E quante sono?
Voi cosa scegliereste?

Si lascia che le/i ragazze/i rispondano individualmente alle varie domande, poi si sceglie per sorteggio una/uno di loro e si chiede di scrivere alla lavagna le sue proposte. In seguito si apre la discussione, lasciando spazio a tutti gli interventi necessari, fino all'individuazione di tutte e sei le seguenti combinazioni possibili e a tutte le diverse preferenze.

AB → Caccia al tesoro nel bosco del tesoro perduto – Gara di minigolf
AC → Caccia al tesoro nel bosco del tesoro perduto – Gran premio con go-kart a pedali
AD → Caccia al tesoro nel bosco del tesoro perduto – Il villaggio sugli alberi
BC → Gara di minigolf – Gran premio con go-kart a pedali
BD → Gara di minigolf – Il villaggio sugli alberi
CD → Gran premio con go-kart a pedali – Il villaggio sugli alberi



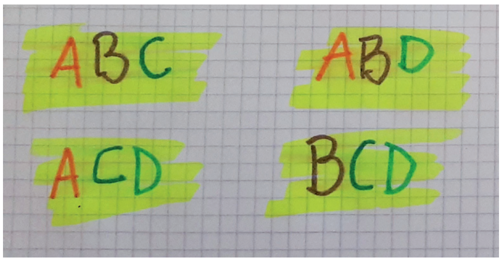
Le scelte possibili di Giovanni di 2 attività su 4.

Si propone, infine, la seguente ultima situazione.

Quando i genitori di Giovanni telefonano per la prenotazione hanno una bella sorpresa: la giornata in cui Giovanni andrà al parco con i suoi amici è la giornata speciale delle offerte e si potranno scegliere tre attività al costo di due.
Giovanni non sta più nella pelle, prende un foglio e comincia subito a elencare tutti i possibili abbinamenti. Quanti e quali saranno secondo voi?
Quale abbinamento scegliereste se foste nei panni di Giovanni?

In questo caso lasceremo che le/i ragazze/i lavorino individualmente per scoprire tutti i seguenti quattro abbinamenti possibili.

ABC → Caccia al tesoro nel bosco del tesoro perduto – Gara di minigolf – Gran premio con go-kart a pedali.
ABD → Caccia al tesoro nel bosco del tesoro perduto – Gara di minigolf – Il villaggio sugli alberi.
ACD → Caccia al tesoro nel bosco del tesoro perduto – Gran premio con go-kart a pedali – Il villaggio sugli alberi.
BCD → Gara di minigolf – Gran premio con go-kart a pedali – Il villaggio sugli alberi.



Le scelte possibili di Giovanni di 3 attività su 4.

Chiediamo a questo punto quale scelta avrebbe fatto ciascuna/o di loro se fosse stata/o al posto di Giovanni. Per stimolare il ragionamento e solleticare la curiosità, chiediamo infine: «*Quante e quali saranno le combinazioni di 3 attività che potrebbe scegliere Giovanni se le proposte per le/i ragazze/i dai 9 agli 11 anni diventassero 5, con l'aggiunta per esempio della Gimkana con le mountain bike?*».
Scriviamo il nuovo l'elenco di attività alla lavagna e chiediamo ad allieve e allievi, organizzati in piccoli gruppi, di individuare tutte le possibili combinazioni.
È poi possibile proporre attività analoghe basate su scelte in differenti contesti; per esempio, avendo a disposizione 4 o 5 tipi di frutta (arancia, ananas, kiwi, banana, pesca) è possibile stabilire quanti e quali frullati diversi si possono preparare con un solo gusto, due, tre, quattro o cinque gusti.

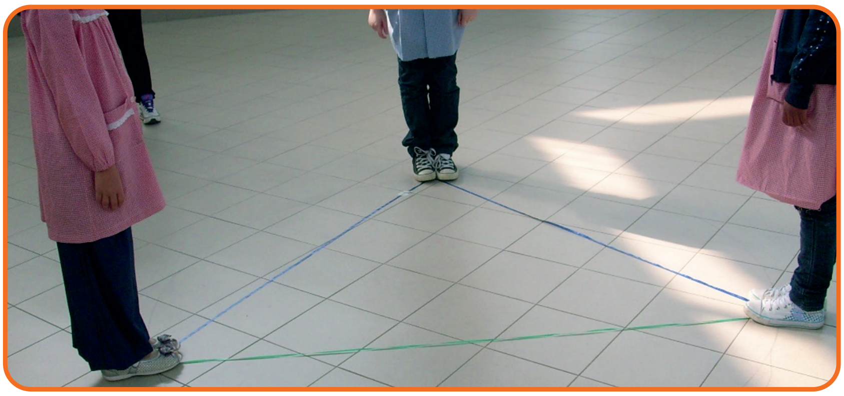
Stringiamoci la mano

Questa divertente attività si basa sul salutarsi stringendosi tutti la mano una sola volta. Cominciamo **con due allieve/i e chiediamo quante strette di mano possono darsi per salutarsi**.
In questo caso ci sarà **una sola stretta di mano** che le/i bambine/i potranno darsi.

Una stretta di mano tra due bambine/i.

Potremmo poi chiedere alle/agli allieve/i di rappresentare sul quaderno la situazione nel modo preferito: alcune/i potrebbero fare il disegno di ciò che si è effettuato concretamente dandosi la mano o unendosi tramite una corda, altri potrebbero rappresentare le/i due bambine/i con le prime due lettere dell'alfabeto (A e B) e metterle una di seguito all'altra per rappresentare la stretta di mano (AB), oppure tramite una doppia freccia (A ↔ B), o in altri modi fantasiosi. Si mettono poi in comune le varie scelte.

Se si aggiunge **una/un terza/o allieva/o (C) le strette di mano diventano 3** e possono essere rappresentate con dei nastri colorati che i bambini possono tendere tra loro o appoggiare a terra.



Rappresentazioni con nastri colorati delle strette di mano tra 3 bambine/i.

La situazione può anche essere nuovamente formalizzata sul quaderno.

AB	BC
AC	

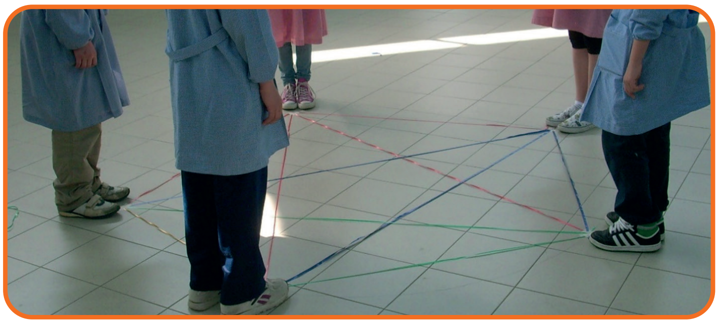
Se si aggiunge **una/un quarta/o allieva/o (D) si avranno le seguenti 6 strette di mano** rappresentate con dei nastri sul pavimento.

Rappresentazioni con nastri colorati delle strette di mano tra 4 bambine/i.

Le strette di mano formalizzate sul quaderno diventano a questo punto le seguenti, rappresentate nei modi scelti dalle/dagli allieve/i.

AB	BC	CD
AC	BD	
AD		

Se si aggiunge anche **la/il quinta/o allieva/o (E) le strette di mano diventano le seguenti 10**:



Rappresentazioni con nastri colorati delle strette di mano tra 5 bambine/i.

... che rappresentate sul quaderno potrebbero diventare queste:

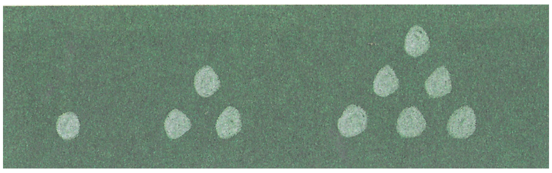
AB	BC	CD	DE
AC	BD	CE	
AD	BE		
AE			

A questo punto è possibile riprendere la lettura di un passo dell'ottava notte del libro "Il mago dei numeri" di Hans M. Enzensberger (1997, pp. 154-157), già proposta per le permutazioni nella precedente uscita ***Combinatoria per i più grandi. Le permutazioni*** (https://missioneinsegnante.it/2025/04/07/combinatoria-per-i-piu-grandi-le-permutazioni/).

«[...]
– Probabilmente sono andati a mangiare un gelato e adesso stanno andando a casa.
– Per salutarsi si danno la mano?
– Figurati. Al massimo si dicono «Ciao» oppure «A dopo».
– Peccato, disse il mago. Mi piacerebbe sapere cosa succede se tutti danno la mano a tutti.
– Scordatelo! Ci vorrebbe un'eternità. Verrebbe fuori un numero enorme di strette. Immagino undici bum! se sono in undici.
– Ti sbagli! Rispose il vecchio.
Se sono in due, rifletté Roberto, basta una stretta di mano. In tre...
– Forse è meglio scrivere.
Roberto scrisse:

PERSONE:	STRETTE DI MANO:
A	–
AB	AB
ABC	AB AC BC
ABCD	AB AC AD BC BD CD

– Allora: in due è una stretta, in tre sono tre, e in quattro sono già sei.
– 1 , 3 , 6... Non ti dice niente?
Roberto non riusciva a ricordare. Allora il mago disegnò alla lavagna alcuni grossi punti:

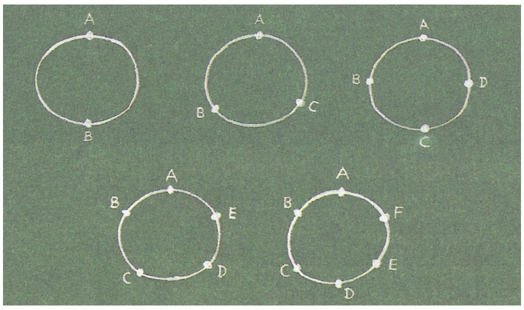


– Le noci di cocco, esclamò Roberto. I numeri triangolari!
– E come funzionano?
– Dovresti saperlo:

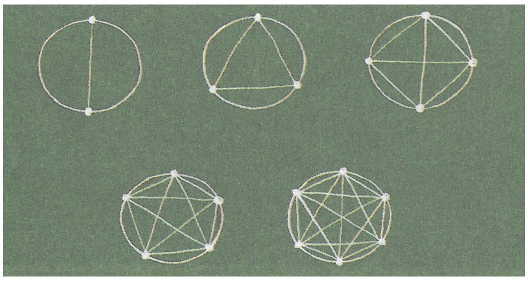
1 + 2 = 3
3 + 3 = 6
6 + 4 = 10
10 + 5 = 15
15 + 6 = 21
21 + 7 = 28
28 + 8 = 36
36 + 9 = 45
45 + 10 =

– Sono esattamente 55 strette di mano.
– Beh, insomma, è un numero ancora accettabile, commentò Roberto.

– Se non hai voglia di fare tanti conti, puoi seguire anche un sistema diverso. Disegna alcuni cerchi, così:



A ogni nuovo cerchio aggiungi una lettera: A per Alberto, B per Bettina, C per Charlie e così via. Poi colleghi tutte le lettere:



Carino vero? Ogni riga è una stretta di mano. Puoi controllare.
– 1 , 3 , 6 , 10 , 15... Ci risiamo, disse Roberto. Però c'è una cosa che non mi torna. Mi spieghi perché quando ti ci metti tu, funziona sempre tutto?
– La matematica è magica, o se vuoi diabolica, proprio per questo [...]».

Dopo la lettura invitiamo le/gli allieve/i a **scoprire quante strette di mano ci saranno se tutte/i le/gli allieve/i della classe si stringessero la mano una sola volta**.
I vari gruppi potrebbero fare diverse scelte rappresentative per arrivare a stabilire il numero di strette di mano. Possiamo confrontare le strategie rappresentative emerse in classe con quelle proposte dal libro (gli abbinamenti di lettere, le noci di cocco, le addizioni successive, i cerchi con le lettere da collegare).
Se non è stato scelto da nessun gruppo, si potrebbe chiedere di continuare le addizioni iniziate dal Mago dei Numeri nel libro fino al numero delle/dei bambine/i della classe, arrivando così con facilità a individuare il numero cercato.

11 bambini	45 + 10 = 55
12 bambini	55 + 11 = 66
13 bambini	66 + 12 = 78
14 bambini	78 + 13 = 91
15 bambini	91 + 14 = 105
16 bambini	105 + 15 = 120
17 bambini	120 + 16 = 136
18 bambini	136 + 17 = 153
19 bambini	153 + 18 = 171
20 bambini	171 + 19 = 190
…	…

Facciamo osservare che la situazione delle strette di mano è analoga all'organizzazione di un torneo a squadre nel quale ogni squadra deve sfidare tutte le altre. Possiamo quindi proporre di organizzare un piccolo torneo a squadre in palestra. Scegliamo insieme un gioco (tiro al bersaglio, centra il cerchio con la palla, tiri al canestro, corsa a staffetta ecc.), formiamo le squadre e stabiliamo che ogni squadra deve sfidare tutte le altre. Chiediamo di individuare quante partite saranno necessarie se si formano 2 squadre, 3 squadre, 4 squadre,... fino al numero di squadre che si ritiene interessante.
Si scoprirà così che, come per le strette di mano, se ci sono 2 squadre sarà necessaria 1 sola partita, con 3 squadre saranno necessarie 3 partite, con 4 squadre 6 partite ecc.
Chiederemo poi di completare la seguente tabella fino al numero di squadre che si desidera.

2 squadre	**3 squadre (A, B e C)**	**4 squadre (A, B, C e D)**	**5 squadre (A, B, C, D e E)**	**...**
AB	AB AC BC	AB AC AD BC BD CD	AB AC AD AE BC BD BE CD CE DE	

Chiediamo infine di preparare il tabellone per registrare i risultati di ogni partita; ora, finalmente, si può iniziare a giocare.

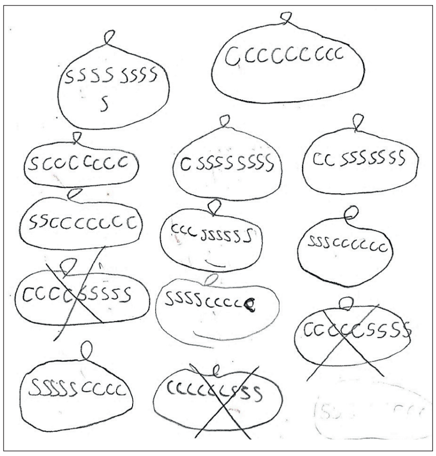
Combinazioni (con ripetizione)

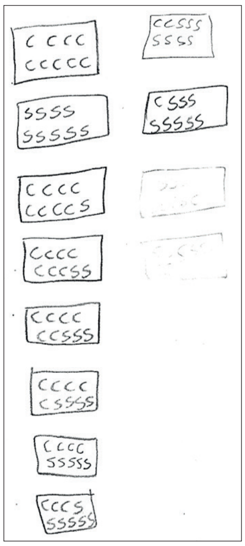
Le seguenti due attività sono sempre **combinazioni**, ma questa volta viene contemplata la possibilità di ripetere gli elementi (**con ripetizione**).

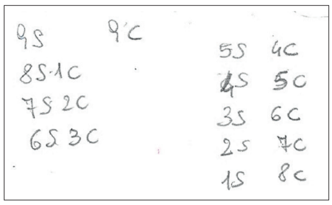
Sciarpe o cappelli?

Dividiamo la classe in piccoli gruppi e proponiamo la seguente situazione: **si devono preparare dei sacchetti diversi, ciascuno dei quali deve contenere 9 oggetti che siano sciarpe o cappelli**. Chiediamo di scoprire quanti sacchetti diversi si possono preparare e quali oggetti contiene ciascun sacchetto.

Lasciamo che ogni gruppo lavori in autonomia, assegnando un tempo di 10/15 minuti, quindi si confrontano i lavori.







Le rappresentazioni scelte da tre gruppi.

Invitiamo una/un allieva/o a rappresentare alla lavagna i sacchetti individuati nel suo gruppo, poi apriamo il confronto con tutti gli altri e integriamo e/o correggiamo il lavoro proposto fino a individuare tutti i possibili sacchetti. Le scelte di rappresentazioni potrebbero essere varie, di seguito ne riportiamo due.

SSSSSSSSS	9S + 0C
SSSSSSSSC	8S + 1C
SSSSSSSCC	7S + 2C
SSSSSSCCC	6S + 3C
SSSSSCCCC	5S + 4C
SSSSCCCCC	4S + 5C
SSSCCCCCC	3S + 6C
SSCCCCCCC	2S + 7C
SCCCCCCCC	1S + 8C
CCCCCCCCC	9S + 0C

Anche in questo caso non è tanto importante individuare la formula, che è piuttosto complessa, quanto che allieve e allievi ricerchino strategie e procedano in modo ordinato per individuare tutte le possibili combinazioni. Se si effettua la stessa attività per la quale si devono preparare tutti i sacchetti diversi possibili, ciascuno dei quali contiene questa volta 10 oggetti invece di 9, che siano sempre sciarpe o cappelli, si avrà:

10S + 0C = 10
9S + 1C = 10
8S + 2C = 10
7S + 3C = 10
6S + 4C = 10
5S + 5C = 10
4S + 6C = 10
3S + 7C = 10
2S + 8C = 10
1S + 9C = 10
0S + 10C = 10

Questa rappresentazione ricorda la tipica attività che si svolge fin dalla prima primaria, ossia la ricerca di tutte le addizioni di due numeri naturali che danno come risultato 10.

10 + 0 = 10
9 + 1 = 10
8 + 2 = 10
7 + 3 = 10
6 + 4 = 10
5 + 5 = 10
4 + 6 = 10
3 + 7 = 10
2 + 8 = 10
1 + 9 = 10
0 + 10 = 10

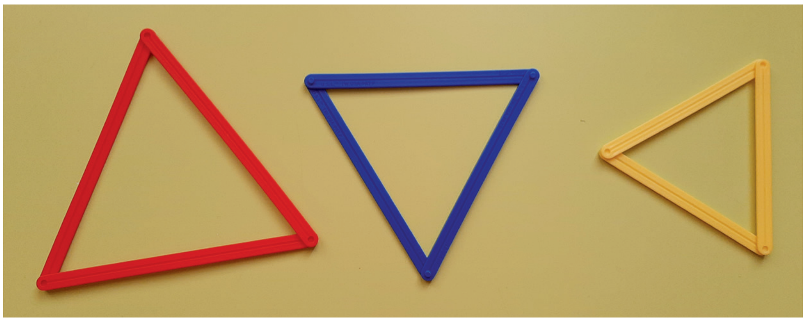
Tutti i triangoli possibili

Anche in questa attività si esplorano le combinazioni con ripetizione di elementi in cui l'ordine non è importante. Si tratta di costruire **tutti i triangoli diversi che si riescono ad ottenere avendo a disposizione 30 asticciole di tre differenti lunghezze (10 per tipo)**. Le tre lunghezze possono eventualmente essere associate a tre colori diversi. È possibile utilizzare delle asticciole di cartoncino dove all'estremità vengono effettuati dei buchi e inseriti dei fermacampioni, oppure delle stecchette a incastro come quelle rappresentate nelle immagini, o ancora delle cannucce colorate.

Si usano, per esempio, 10 asticciole rosse lunghe 15 cm, 10 azzurre lunghe 13 cm e 10 gialle lunghe 10 cm, ma le lunghezze delle stecchette possono anche variare, **l'importante è che con la combinazione di tre qualsiasi asticciole si possa sempre ottenere un triangolo**.

Chiediamo ad allieve e allievi organizzati in piccoli gruppi di costruire tutti i possibili triangoli, uno diverso dall'altro, e di classificarli.

Si potranno costruire 3 triangoli equilateri, ossia con tutti i lati della stessa lunghezza (3 lati di color rosso, 3 lati di color azzurro e 3 lati di color giallo).

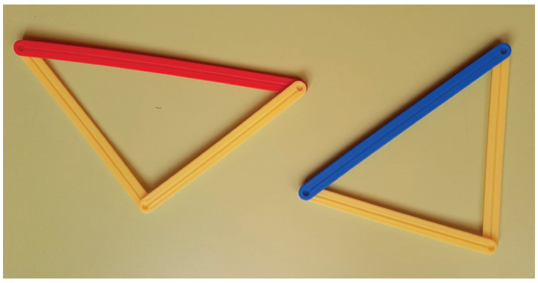


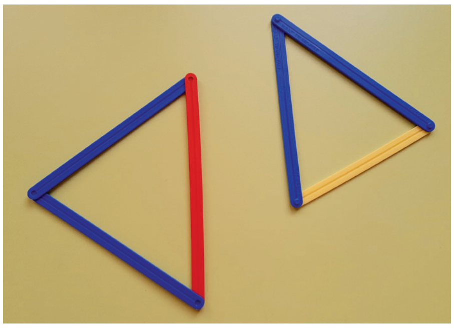
Triangoli equilateri.

Un solo triangolo scaleno, ossia con tutti i lati di lunghezze diverse (lati di tre colori diversi).

Triangolo scaleno.

E **6 triangoli isosceli generici diversi**, ossia con due lati della stessa lunghezza (2 con i lati congruenti gialli, 2 con i lati congruenti rossi e 2 con i lati congruenti azzurri).

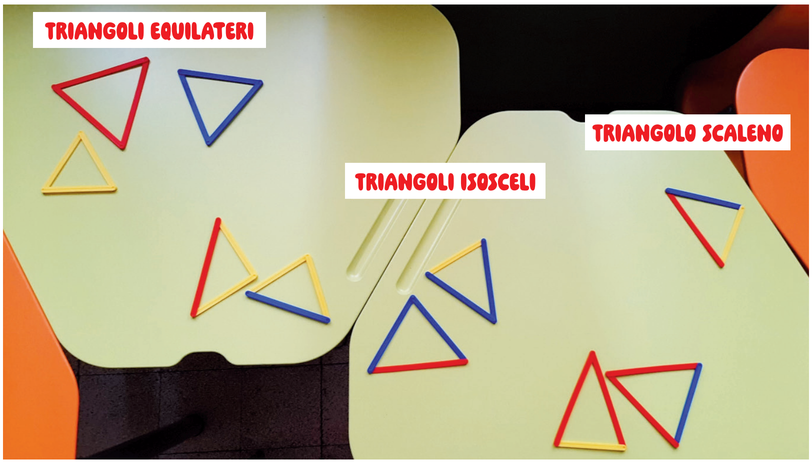




Triangoli isosceli.

Con le 30 stecchette, 10 per lunghezza (colore), si possono quindi costruire 10 triangoli diversi.

A conclusione dell’attività, si chiede di rappresentare sul quaderno la classificazione dei triangoli ottenuti.

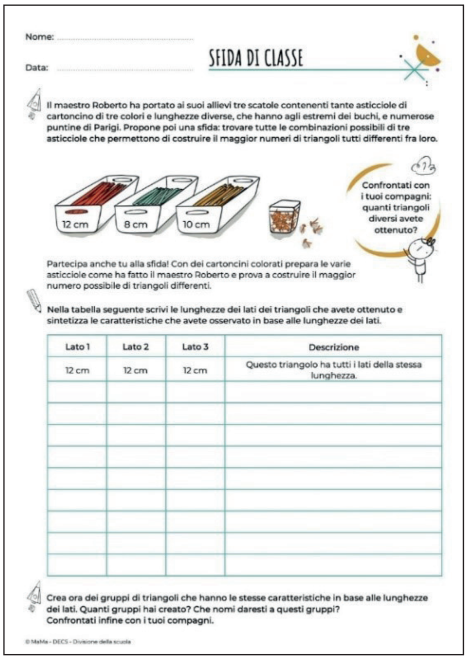


Classificazione dei triangoli costruiti.

Si possono poi rappresentare le diverse combinazioni con le lettere dei colori: azzurro (A), giallo (G) e rosso (R), così da ottenere la seguente tabella.

AAA AAG AAR AGR	GGG GGR GGA	RRR RRG RRA

Questa attività è anche proposta nella pratica didattica “I triangoli e le loro classificazioni” dei materiali *MaMa-matematica per la scuola elementare* (https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiale-didattico/?ds_id=1207) nella quale si trovano tra gli allegati le asticciole di cartoncino da ritagliare, ed è anche presentata nella scheda didattica “Sfida di classe” (https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiale-didattico/?ds_id=1115) che può essere consegnata per istituzionalizzare l’esperienza realizzata.



Nome: ....

Data: ....

SFIDA DI CLASSE

Il maestro Roberto ha portato ai suoi allievi tre scatole contenenti tante asticciole di cartoncino di tre colori e lunghezze diverse, che hanno agli estremi dei buchi, e numerose puntine di Parigi. Propone poi una sfida: trovare tutte le combinazioni possibili di tre asticciole che permettono di costruire il maggior numeri di triangoli tutti differenti fra loro.

12 cm
8 cm
10 cm

Confrontati con i tuoi compagni: quanti triangoli diversi avete ottenuto?

Partecipa anche tu alla sfida! Con dei cartoncini colorati prepara le varie asticciole come ha fatto il maestro Roberto e prova a costruire il maggior numero possibile di triangoli differenti.

Nella tabella seguente scrivi le lunghezze dei lati dei triangoli che avete ottenuto e sintetizza le caratteristiche che avete osservato in base alle lunghezze dei lati.

Lato 1	Lato 2	Lato 3	Descrizione
12 cm	12 cm	12 cm	Questo triangolo ha tutti i lati della stessa lunghezza.

Crea ora dei gruppi di triangoli che hanno le stesse caratteristiche in base alle lunghezze dei lati. Quanti gruppi hai creato? Che nomi daresti a questi gruppi? Confrontati infine con i tuoi compagni.

© MaMa - DECS - Divisione della scuola

Scheda dei materiali MaMa legata all’attività.

Obiettivi di apprendimento

- Rappresentare relazioni e dati e, in situazioni significative, utilizzare le rappresentazioni per ricavare informazioni, formulare giudizi e prendere decisioni.
- Rappresentare problemi con tabelle e grafici che ne esprimono la struttura.

Durata del percorso

1. **Combiniamo i numeri**: 30 minuti circa.
2. **Indovina la password**: 1 ora circa.
3. **Il gioco delle monete**: 1 ora circa.
4. **Sasso, carta, forbici**: 30 minuti.
5. **Una gita al parco avventura**: 1 ora.
6. **Stringiamoci la mano**: 1 ora circa.
7. **Sciarpe e cappelli**: 30 minuti.
8. **Tutti i triangoli possibili**: 30 minuti.

Durata complessiva: 6 ore circa.

Materiali

1. **Combiniamo i numeri**: fogli A4 o quaderni; matite e matite colorate.
2. **Indovina la password**: scatoline bianche o di recupero da rovesciare (spigoli lunghi circa 10 cm × 7 cm × 2,5 cm); tempere; dischetti adesivi rotondi (circa 17 mm di diametro) o rettangolari (circa 20 mm × 12 mm); fogli di carta A4; matite; matite colorate; pennarelli; scheda (allegato 1); quaderni.
3. **Il gioco delle monete**: monete di plastica se disponibili a scuola, oppure cartone da imballaggio in quantità sufficiente per costruire almeno 20 monete ogni gruppo di allieve/i; un oggetto cilindrico per disegnare cerchi di circa 5 o 6 cm di diametro; forbici; fogli di carta A4; matite, pennarelli, quaderni.
4. **Sasso, carta, forbici**: fogli di carta A4 o quaderni; matite, matite colorate.
5. **Una gita al parco avventura**: fogli di carta A4 o quaderni; matite, pennarelli, penne.
6. **Stringiamoci la mano**: fogli di carta A4 o quaderni; matite, pennarelli, penne; nastri da pacchi di diversi colori; libro “Il mago dei numeri” di Hans M. Enzensberger (Einaudi, 1997).
7. **Sciarpe e cappelli**: fogli di carta A4 o quaderni; matite, penne.
8. **Tutti i triangoli possibili**: asticciole di cartoncino o stecchette di plastica a incastro (oppure cannucce): 10 rosse lunghe 15 cm, 10 azzurre lunghe 13 cm e 10 gialle lunghe 10 cm per ogni gruppo di allievi; se si usano le asticciole di cartoncino sono necessari 30 fermacampioni ogni gruppo di allieve/i; fogli di carta A4; matite, pennarelli, penne.

Per saperne di più

Arrigo G., Maurizi L, Minazzi T. & Ramone V. (2023). Combinatoria, Probabilità, Statistica. Bonomo editore.

“Esperienze di combinatoria alla scuola elementare” Piattaforma “MaMa – Matematica per la scuola elementare” (https://mama.edu.ti.ch/wp-content/uploads/2022/07/MD_Pratiche-didattiche_I-V_Esperienze-di-combinatoria-alla-scuola-elementare.pdf)

* Lorella Campolucci è *coordinatrice del gruppo Matematica in Rete (MiR) di Corinaldo (AN); già docente presso la scuola primaria “A. Api” di Ostra Vetere - I.C. Corinaldo*.

* Silvia Sbaragli è *responsabile del Centro competenze Didattica della Matematica del Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI di Locarno, Svizzera*.